2

Fundamentos de Matemática Elementar

NOVOS TESTES DE VESTIBULARES

Gelson Iezzi
Osvaldo Dolce
Carlos Murakami

• logaritmos

GELSON IEZZI
OSVALDO DOLCE
CARLOS MURAKAMI

FUNDAMENTOS DE

MATEMÁTICA ELEMENTAR 2

LOGARITMOS

ATUAL
EDITORA

Apresentação

Fundamentos de Matemática Elementar é uma coleção elaborada com o objetivo de oferecer ao estudante uma visão global da Matemática, no ensino médio. Desenvolvendo os programas em geral adotados nas escolas, a coleção dirige-se aos vestibulandos, aos universitários que necessitam rever a Matemática elementar e também, como é óbvio, àqueles alunos de ensino médio cujo interesse focaliza-se em adquirir uma formação mais consistente na área de Matemática.

No desenvolvimento dos capítulos dos livros de *Fundamentos* procuramos seguir uma ordem lógica na apresentação de conceitos e propriedades. Salvo algumas exceções bem conhecidas da Matemática elementar, as proposições e os teoremas estão sempre acompanhados das respectivas demonstrações.

Na estruturação das séries de exercícios, buscamos sempre uma ordenação crescente de dificuldade. Partimos de problemas simples e tentamos chegar a questões que envolvem outros assuntos já vistos, levando o estudante a uma revisão. A seqüência do texto sugere uma dosagem para teoria e exercícios. Os exercícios resolvidos, apresentados em meio aos propostos, pretendem sempre dar explicação sobre alguma novidade que aparece. No final de cada volume, o aluno pode encontrar as respostas para os problemas propostos e assim ter seu reforço positivo ou partir à procura do erro cometido.

A última parte de cada volume é constituída por testes de vestibulares, selecionados dos melhores vestibulares do país e com respostas. Esses testes podem ser usados para uma revisão da matéria estudada.

Aproveitamos a oportunidade para agradecer ao professor dr. Hygino H. Domingues, autor dos textos de história da Matemática que contribuem muito para o enriquecimento da obra.

Neste volume, estudaremos funções exponenciais e logarítmicas bem como suas aplicações na resolução de equações e inequações. Entretanto, sugerimos que seja feita uma revisão preliminar sobre os conceitos e as propriedades de potências e raízes.

Finalmente, como há sempre uma certa distância entre o anseio dos autores e o valor de sua obra, gostaríamos de receber dos colegas professores uma apreciação sobre este trabalho, notadamente os comentários críticos, os quais agradecemos.

Os autores

Sumário

CAPÍTULO I — POTÊNCIAS E RAÍZES 1
I. Potência de expoente natural 1
II. Potência de expoente inteiro negativo 6
III. Raiz enésima aritmética 9
IV. Potência de expoente racional 17
V. Potência de expoente irracional 21
VI. Potência de expoente real 23
Leitura: Stifel, Bürgi e a criação dos logaritmos 24

CAPÍTULO II — FUNÇÃO EXPONENCIAL 27
I. Definição 27
II. Propriedades 27
III. Imagem 33
IV. Gráfico 33
V. Equações exponenciais 39
VI. Inequações exponenciais 48
Leitura: Os logaritmos segundo Napier 55

CAPÍTULO III — LOGARITMOS 57
I. Conceito de logaritmo 57
II. Antilogaritmo 58
III. Conseqüências da definição 60
IV. Sistemas de logaritmos 62
V. Propriedades dos logaritmos 63
VI. Mudança de base 72
Leitura: Lagrange: a grande pirâmide da Matemática 77

CAPÍTULO IV — FUNÇÃO LOGARÍTMICA 80
I. Definição 80
II. Propriedades 80
III. Imagem 83
IV. Gráfico 83

CAPÍTULO V — EQUAÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS 88
I. Equações exponenciais 88
II. Equações logarítmicas 91
Leitura: Gauss e o universo em Matemática 109

CAPÍTULO VI — INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS 112
I. Inequações exponenciais 112
II. Inequações logarítmicas 115
Leitura: A computação e o sonho de Babbage 126

CAPÍTULO VII — LOGARITMOS DECIMAIS 130
I. Introdução 130
II. Característica e mantissa 131
III. Regras da característica 131
IV. Mantissa 133
V. Exemplos de aplicações da tábua de logaritmos 136

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS 142

TESTES DE VESTIBULARES 160

RESPOSTAS DOS TESTES 195

CAPÍTULO I

Potências e Raízes

I. Potência de expoente natural

1. *Definição*

Seja a um número real e n um número natural. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \forall\, n, n \geqslant 1 \end{cases}$$

Dessa definição decorre que:

$$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$$
$$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$$
$$a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a$$

e, de modo geral, para p natural e $p \geqslant 2$, temos que a^p é um produto de p fatores iguais a a.

2. *Exemplos*

1º) $3^0 = 1$

2º) $(-2)^0 = 1$

3º) $5^1 = 5$

4º) $\left(\frac{1}{7}\right)^1 = \frac{1}{7}$

5º) $(-3)^1 = -3$
6º) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
7º) $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$
8º) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$
9º) $(-0,1)^5 = (-0,1)\ (-0,1)\ (-0,1)\ (-0,1)\ (-0,1) = -0,00001$
10º) $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
11º) $0^0 = 1$
12º) $0^1 = 0$

EXERCÍCIOS

1. Calcule:

a) $(-3)^2$ b) -3^2 c) -2^3 d) $-(-2)^3$

Solução

a) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$
b) $-3^2 = -(3) \cdot (3) = -9$
c) $-2^3 = -(2)(2)(2) = -8$
d) $-(-2)^3 = -(-2)(-2)(-2) = 8$

2. Calcule:

a) $(-3)^3$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ i) -2^2 m) 0^7

b) $(-2)^1$ f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ j) $-\left(-\frac{3}{2}\right)^3$ n) $(-4)^0$

c) 3^4 g) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ k) $(-1)^{10}$ o) -5^0

d) 1^7 h) $\left(\frac{2}{3}\right)^0$ l) $(-1)^{13}$ p) $-(-1)^{15}$

3. Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, então valem as seguintes propriedades:

P₁. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P₂. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$ e $m \geqslant n$

P₃. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

P₄. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

P₅. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Demonstração de P_1 (por indução sobre n).

Consideremos m fixo.

1º) A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois:

$$a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0$$

2º) Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$, e mostremos que é verdadeira para $n = p + 1$, isto é, $a^m \cdot a^{p+1} = a^{m+p+1}$. De fato:

$$a^m \cdot a^{p+1} = a^m \cdot (a^p \cdot a) = (a^m \cdot a^p) \cdot a = a^{m+p} \cdot a = a^{m+p+1}$$

Demonstração de P_3 (por indução sobre n).

1º) A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois:

$$(a \cdot b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0$$

2º) Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$, e mostremos que é verdadeira para $n = p + 1$, isto é, $(a \cdot b)^{p+1} = a^{p+1} \cdot b^{p+1}$. De fato:

$$(a \cdot b)^{p+1} = (a \cdot b)^p \cdot (a \cdot b) = (a^p \cdot b^p) \cdot (a \cdot b) = (a^p \cdot a) \cdot (b^p \cdot b) = a^{p+1} \cdot b^{p+1}$$

Demonstração de P_5 (por indução sobre n).

Consideremos m fixo.

1º) A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois:

$$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0}$$

2º) Supondo que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $(a^m)^p = a^{m \cdot p}$, mostremos que é verdadeira para $n = p + 1$, isto é, $(a^m)^{p+1} = a^{m \cdot (p+1)}$. De fato:

$$(a^m)^{p+1} = (a^m)^p \cdot (a^m) = a^{m \cdot p} \cdot a^m = a^{m \cdot p+m} = a^{m(p+1)}$$

As demonstrações das propriedades $\mathbf{P_2}$ e $\mathbf{P_4}$ ficam como exercícios.

As propriedades $\mathbf{P_1}$ a $\mathbf{P_5}$ têm grande aplicação nos cálculos com potências. A elas nos referiremos com o nome simplificado de *propriedades* (P) nos itens seguintes.

Nas "ampliações" que faremos logo a seguir no conceito de potência, procuraremos manter sempre válidas as propriedades (P), isto é, estas propriedades serão estendidas sucessivamente para potências de expoente inteiro, racional e real.

4. Na definição da potência a^n, a base a pode ser um número real positivo, nulo ou negativo.

Vejamos o que ocorre em cada um desses casos:

1º caso

$$a = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0^n = 0 & \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1 \\ 0^0 = 1 \end{cases}$$

2º caso

$$a > 0 \Rightarrow a^n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

isto é, toda potência de base real positiva e expoente $n \in \mathbb{N}$ é um número real positivo.

3º caso

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^{2n} > 0 & \forall\, n \in \mathbb{N} \\ a^{2n+1} < 0 & \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

isto é, toda potência de base negativa e expoente par é um número real positivo e toda potência de base negativa e expoente ímpar é um número real negativo.

EXERCÍCIOS

3. Se $n \in \mathbb{N}$, calcule o valor de $A = (-1)^{2n} - (-1)^{2n+3} + (-1)^{3n} - (-1)^{n}$.

4. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:

a) $5^3 \cdot 5^2 = 5^6$

b) $3^6 : 3^2 = 3^3$

c) $2^3 \cdot 3 = 6^3$

d) $(2 + 3)^4 = 2^4 + 3^4$

e) $(5^3)^2 = 5^6$

f) $(-2)^6 = 2^6$

g) $\frac{2^7}{2^5} = (-2)^2$

h) $5^2 - 4^2 = 3^2$

5. Simplifique $(a^4 \cdot b^3)^3 \cdot (a^2 \cdot b)^2$.

Solução

$$(a^4 \cdot b^3)^3 \cdot (a^2 \cdot b)^2 = (a^{4 \cdot 3} \cdot b^{3 \cdot 3}) \cdot (a^{2 \cdot 2} \cdot b^2) = a^{12} \cdot b^9 \cdot a^4 \cdot b^2 =$$
$$= a^{12+4} \cdot b^{9+2} = a^{16} \cdot b^{11}.$$

6. Simplifique as expressões, supondo $a \cdot b \neq 0$.

a) $(a^2 \cdot b^3)^2 \cdot (a^3 \cdot b^2)^3$

b) $\frac{(a^4 \cdot b^2)^3}{(a \cdot b^2)^2}$

c) $[(a^3 \cdot b^2)^2]^3$

d) $\left(\frac{a^4 \cdot b^3}{a^2 \cdot b}\right)^5$

e) $\frac{(a^2 \cdot b^3)^4 \cdot (a^3 \cdot b^4)^2}{(a^3 \cdot b^2)^3}$

7. Se a e b são números reais, então em que condições $(a + b)^2 = a^2 + b^2$?

8. Determine o menor número inteiro positivo x para que $2\,940x = M^3$, em que M é um inteiro.

9. Determine o último algarismo (algarismo das unidades) do número $14^{(14^{14})}$.

II. Potência de expoente inteiro negativo

5. *Definição*

Dado um número real a, não nulo, e um número n natural, define-se a potência a^{-n} pela relação

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

isto é, a potência de base real, não nula, e expoente inteiro negativo é definida como o inverso da correspondente potência de inteiro positivo.

6. *Exemplos*

1º) $2^{-1} = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$

2º) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

3º) $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{1}{8}$

4º) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{9}{4}$

5º) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-5} = \dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{32}} = -32$

EXERCÍCIOS

10. Calcule o valor das expressões:

a) $\dfrac{2^{-1} - (-2)^2 + (-2)^{-1}}{2^2 + 2^{-2}}$ b) $\dfrac{3^2 - 3^{-2}}{3^2 + 3^{-2}}$ c) $\dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3}{\left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2\right]^3}$

11. Calcule:

a) 3^{-1}

b) $(-2)^{-1}$

c) -3^{-1}

d) $-(-3)^{-1}$

e) 2^{-2}

f) $(-3)^{-2}$

g) -5^{-2}

h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

j) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$

k) $-\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

l) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

m) $(0,1)^{-2}$

n) $(0,25)^{-3}$

o) $(-0,5)^{-3}$

p) $(0,75)^{-2}$

q) $\frac{1}{2^{-3}}$

r) $\frac{1}{(0,2)^{-2}}$

s) $\frac{1}{(-3)^{-3}}$

t) $\frac{1}{(0,01)^{-2}}$

12. Remova os expoentes negativos e simplifique a expressão $\frac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}}$, em que $x, y \in \mathbb{R}^*$.

7. *Observações*

1ª) Com a definição de potência de expoente inteiro negativo, a propriedade (P_4)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a \neq 0)$$

passa a ter significado para $m < n$.

2ª) Se $a = 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, 0^{-n} é um símbolo sem significado.

8.

Com as definições de potência de expoente natural e potência de expoente inteiro negativo, podemos estabelecer a seguinte definição:

Se $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$, então:

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ a^{n-1} \cdot a & \text{se } n > 0 \\ \dfrac{1}{a^{-n}} & \text{se } n < 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

Estas potências têm as *propriedades (P)*

P₁. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P₂. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

P₃. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

P₄. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

P₅. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

em que $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

EXERCÍCIOS

13. Classifique em verdadeira (*V*) ou falsa (*F*) cada uma das sentenças abaixo:

a) $(5^3)^{-2} = 5^{-6}$

b) $2^{-4} = -16$

c) $(\pi + 2)^{-2} = \pi^{-2} + 2^{-2}$

d) $3^{-4} \cdot 3^5 = \dfrac{1}{3}$

e) $\dfrac{7^{-2}}{7^{-5}} = 7^{-3}$

f) $\dfrac{5^2}{5^{-6}} = 5^8$

g) $2^{-1} - 3^{-1} = 6^{-1}$

h) $\pi^1 + \pi^{-1} = 1$

i) $(2^{-3})^{-2} = 2^6$

j) $3^2 \cdot 3^{-2} = 1$

14. Se $a \cdot b \neq 0$, simplifique $\dfrac{(a^3 \cdot b^{-2})^{-2}}{(a^{-4} \cdot b^3)^3}$.

Solução

$$\frac{(a^3 \cdot b^{-2})^{-2}}{(a^{-4} \cdot b^3)^3} = \frac{a^{3(-2)} \cdot b^{(-2)\cdot(-2)}}{a^{-4 \cdot 3} \cdot b^{3 \cdot 3}} = \frac{a^{-6} \cdot b^4}{a^{-12} \cdot b^9} = a^{-6-(-12)} \cdot b^{4-9} =$$

$$a^6 \cdot b^{-5} = \frac{a^6}{b^5}$$

15. Se $a \cdot b \neq 0$, simplifique as expressões:

a) $(a^{-2} \cdot b^3)^{-2} \cdot (a^3 \cdot b^{-2})^3$

b) $\dfrac{(a^5 \cdot b^3)^2}{(a^{-4} \cdot b)^{-3}}$

c) $[(a^2 \cdot b^{-3})^2]^{-3}$

d) $\left(\dfrac{a^3 \cdot b^{-4}}{a^{-2} \cdot b^2}\right)^3$

e) $\dfrac{(a^3 \cdot b^{-2})^{-2} \cdot (a \cdot b^{-2})^3}{(a^{-1} \cdot b^2)^{-3}}$

f) $(a^{-1} + b^{-1}) \cdot (a + b)^{-1}$

g) $(a^{-2} - b^{-2}) \cdot (a^{-1} - b^{-1})^{-1}$

16. Se $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}^*$, simplifique as expressões:

a) $a^{2n+1} \cdot a^{1-n} \cdot a^{3-n}$

b) $\dfrac{a^{2n+3} \cdot a^{n-1}}{a^{2(n-1)}}$

c) $\dfrac{a^{2(n+1)} \cdot a^{3-n}}{a^{1-n}}$

d) $\dfrac{a^{n+4} - a^3 \cdot a^n}{a^4 \cdot a^n}$

III. Raiz enésima aritmética

9. *Definição*

Dados um número real $a \geqslant 0$ e um número natural n, demonstra-se que existe sempre um número real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$.

Ao número b chamaremos raiz enésima aritmética de a e indicaremos pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$ em que a é chamado radicando e n é o índice.

Exemplos

1º) $\sqrt[5]{32} = 2$ porque $2^5 = 32$
2º) $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$
3º) $\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$
4º) $\sqrt[7]{0} = 0$ porque $0^7 = 0$
5º) $\sqrt[6]{1} = 1$ porque $1^6 = 1$

10. *Observações*

1ª) Da definição decorre $(\sqrt[n]{a})^n = a$, para todo $a \geqslant 0$.

2ª) Observemos na definição dada que:

$$\sqrt{36} = 6 \text{ e não } \sqrt{36} = \pm 6$$

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \text{ e não } \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}$$

mas

$$-\sqrt[3]{8} = -2,\ -\sqrt{4} = -2,\ \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

são sentenças verdadeiras em que o radical "não é causador" do sinal que o antecede.

3ª) Devemos estar atentos no cálculo da raiz quadrada de um quadrado perfeito:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Exemplos

1º) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ e não $\sqrt{(-5)^2} = -5$
2º) $\sqrt{x^2} = |x|$ e não $\sqrt{x^2} = x$

EXERCÍCIOS

17. Classifique em verdadeira (*V*) ou falsa (*F*) cada uma das sentenças abaixo:

a) $\sqrt[3]{27} = 3$
b) $\sqrt{4} = \pm 2$
c) $\sqrt[4]{1} = 1$
d) $-\sqrt{9} = -3$
e) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$
f) $\sqrt[3]{0} = 0$

18. Classifique em verdadeira (*V*) ou falsa (*F*) cada uma das sentenças abaixo:

a) $\sqrt{x^4} = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$
b) $\sqrt{x^{10}} = x^5,\ \forall x \in \mathbb{R}$
c) $\sqrt{x^6} = x^3,\ \forall x \in \mathbb{R}_+$
d) $\sqrt{(x-1)^2} = x - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ e $x \geqslant 1$
e) $\sqrt{(x-3)^2} = 3 - x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ e $x \leqslant 3$

19. Determine a raiz quadrada aritmética de $(x - 1)^2$.

Solução

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ 1 - x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

20. Determine a raiz quadrada aritmética de:

a) $(x + 2)^2$ b) $(2x - 3)^2$ c) $x^2 - 6x + 9$ d) $4x^2 + 4x + 1$

11. *Propriedades*

Se $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, temos:

R₁. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$
R₂. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
R₃. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$
R₄. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
R₅. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$

Demonstrações

R₁. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{np}}$

Façamos $\sqrt[n]{a^m} = x$; então:
$x^{np} = (\sqrt[n]{a^m})^{np} = [(\sqrt[n]{a^m})^n]^p = [a^m]^p \Rightarrow x = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

R₂. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Façamos $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; então:
$x^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab \Longrightarrow x = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

R₄. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Considerando n fixo e $m \geqslant 0$, provaremos por indução sobre m:

1º) A propriedade é verdadeira para $m = 0$, pois:

$$(\sqrt[n]{a})^0 = 1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{a^0}$$

2º) Supondo a propriedade verdadeira para $m = p$, isto é, $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$, provemos que é verdadeira para $m = p + 1$, isto é:

$$(\sqrt[n]{a})^{p+1} = \sqrt[n]{a^{p+1}}$$

De fato:

$$(\sqrt[n]{a})^{p+1} = (\sqrt[n]{a})^p \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^p \cdot a} = \sqrt[n]{a^{p+1}}$$

Se $m < 0$, façamos $-m = q > 0$; então:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^q} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^q}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{a^m}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}} = \sqrt[n]{a^m}$$

R₅. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$

Façamos $x = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$; então:

$$x^p = (\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}})^p = \sqrt[n]{a} \implies (x^p)^n = (\sqrt[n]{a})^n \implies x^{pn} = a \implies x = \sqrt[pn]{a}$$

A verificação da propriedade $\mathbf{R_3}$ fica como exercício.

12. *Observação*

Notemos que, se $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

para $b \geqslant 0$, $\quad b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot b^n}$

para $b < 0$, $\quad b \cdot \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{a \cdot |b|^n}$

isto é, o coeficiente do radical (a menos do sinal) pode ser colocado no radicando com expoente igual ao índice do radical.

Exemplos

1º) $2 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$

2º) $-5\sqrt{2} = -\sqrt{2 \cdot 5^2} = -\sqrt{50}$

3º) $-2\sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{2 \cdot 2^4} = -\sqrt[4]{32}$

EXERCÍCIOS

21. Simplifique os radicais:

a) $\sqrt[3]{64}$ b) $\sqrt{576}$ c) $\sqrt{12}$ d) $\sqrt[3]{2^7}$

Solução

a) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$
b) $\sqrt{576} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2} = \sqrt{2^6} \cdot \sqrt{3^2} = 2^3 \cdot 3 = 24$
c) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
d) $\sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

22. Simplifique os radicais:

a) $\sqrt{144}$ b) $\sqrt{324}$ c) $\sqrt[3]{729}$ d) $\sqrt{196}$ e) $\sqrt[4]{625}$ f) $\sqrt{18}$ g) $\sqrt{128}$ h) $\sqrt[3]{72}$ i) $\sqrt[4]{512}$

23. Simplifique as expressões:

a) $\sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{72} - \sqrt{50}$
b) $5\sqrt{108} + 2\sqrt{243} - \sqrt{27} + 2\sqrt{12}$
c) $\sqrt{20} - \sqrt{24} + \sqrt{125} - \sqrt{54}$
d) $\sqrt{2\,000} + \sqrt{200} + \sqrt{20} + \sqrt{2}$
e) $\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$
f) $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{192}$
g) $a\sqrt[3]{ab^4} + b\sqrt[3]{a^4b} + \sqrt[3]{a^4b^4} - 3ab\sqrt[3]{ab}$

24. Simplifique:

a) $\sqrt{81x^3}$ b) $\sqrt{45x^3y^2}$ c) $\sqrt{12x^4y^5}$ d) $\sqrt{8x^2}$

25. Reduza ao mesmo índice $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ *e* $\sqrt[4]{5}$.

Solução

O mínimo múltiplo comum entre *2*, *3* e *4* é *12*; então, reduzindo ao índice *12*, temos:

$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6}$, $\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4}$, $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$.

26. Reduza ao mesmo índice:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[5]{3}$

b) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[6]{5}$

c) $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{5^3}$

d) $\sqrt[3]{3^2}$, $\sqrt{2^3}$, $\sqrt[5]{5^4}$, $\sqrt[6]{2^5}$

27. Efetue as operações indicadas com as raízes:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$

b) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt[3]{4} : \sqrt[4]{2}$

f) $\sqrt[3]{\frac{5}{2}} : \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$

Solução

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3} = \dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

c) $\sqrt{\dfrac{3}{2}} : \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\dfrac{3}{2} \cdot 2} = \sqrt{3}$

d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{108}$

e) $\sqrt[3]{4} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{(2^2)^4} : \sqrt[12]{2^3} = \dfrac{\sqrt[12]{2^8}}{\sqrt[12]{2^3}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^8}{2^3}} = \sqrt[12]{2^5} = \sqrt[12]{32}$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}} : \sqrt[5]{\dfrac{1}{2}} = \sqrt[15]{\dfrac{5^5}{2^5}} : \sqrt[15]{\dfrac{1}{2^3}} = \sqrt[15]{\dfrac{5^5}{2^5} : \dfrac{1}{2^3}} = \sqrt[15]{\dfrac{5^5}{2^2}}$

28. Efetue as operações indicadas com as raízes:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{30}$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{18}$

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$

e) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12}$

f) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6}$

g) $\sqrt{6} : \sqrt{3}$

h) $\sqrt{24} : \sqrt{6}$

i) $\sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{2}$

j) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

k) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{5}$

l) $\sqrt[3]{3} : \sqrt{2}$

m) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2}$

n) $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}$

o) $\dfrac{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt{15}}$

29. Efetue as operações:

a) $(\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$

b) $(3 + \sqrt{2}) \cdot (5 - 3\sqrt{2})$

c) $(5 - 2\sqrt{3})^2$

Solução

a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{27} \cdot \sqrt{3} + 3\sqrt{75} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} - 2\sqrt{81} + 3 \cdot \sqrt{225} =$
$= 6 - 2 \cdot 9 + 3 \cdot 15 = 33$

b) $(3 + \sqrt{2}) \cdot (5 - 3\sqrt{2}) = 15 - 9\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6 = 9 - 4\sqrt{2}$

c) $(5 - 2\sqrt{3})^2 = 25 - 20\sqrt{3} + 12 = 37 - 20\sqrt{3}$

30. Efetue as operações:

a) $2\sqrt{3}\,(3\sqrt{5} - 2\sqrt{20} - \sqrt{45})$

b) $(\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{125}) : 2\sqrt{5}$

c) $(6 + \sqrt{2}) \cdot (5 - \sqrt{2})$

d) $(3 + \sqrt{5}) \cdot (7 - \sqrt{5})$

e) $(\sqrt{2} + 3) \cdot (\sqrt{2} - 4)$

f) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) \cdot (5\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

g) $(2\sqrt{5} - 4\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{5} + 2\sqrt{7})$

h) $(3 + \sqrt{2})^2$

i) $(4 - \sqrt{5})^2$

j) $(2 + 3\sqrt{7})^2$

k) $(1 - \sqrt{2})^4$

31. Efetue:

a) $(4\sqrt{8} - 2\sqrt{18}) : \sqrt[3]{2}$

b) $(3\sqrt{12} + 2\sqrt{48}) : \sqrt[4]{3}$

c) $(3\sqrt{18} + 2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} - \sqrt{50}) \cdot \sqrt[4]{2}$

d) $(\sqrt{8} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[4]{4}) : \sqrt{2}$

32. Efetue:

a) $\sqrt{\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt{\sqrt{2} + 1}$

b) $\sqrt{7 + \sqrt{24}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{24}}$

c) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

33. Simplifique:

a) $\sqrt{a + \sqrt{b}} \cdot \sqrt{a - \sqrt{b}} \cdot \sqrt{a^2 - b}$

b) $(2\sqrt{x \cdot y} + x\sqrt{y} + y\sqrt{x}) : \sqrt{xy}$

c) $\left(a \cdot \sqrt{\dfrac{a}{b}} + 2\sqrt{ab} + b \cdot \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right) \cdot \sqrt{ab}$

d) $\sqrt{p + \sqrt{p^2 - 1}} \cdot \sqrt{p - \sqrt{p^2 - 1}}$

e) $\sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 - y^3}} \cdot \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - y^3}}$

34. Simplifique as raízes:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{16}}$ c) $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$

35. Racionalize os denominadores das frações:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\dfrac{5}{3-\sqrt{7}}$ d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Solução

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

c) $\dfrac{5}{3-\sqrt{7}} = \dfrac{5}{3-\sqrt{7}} \cdot \dfrac{3+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} = \dfrac{5(3+\sqrt{7})}{2}$

d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}-3} =$

$= \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}{4}$

36. Racionalize o denominador de cada fração:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

d) $\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$

e) $\dfrac{4}{2\sqrt{3}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$

h) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{2}}$

i) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

j) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

k) $\dfrac{2}{3+2\sqrt{2}}$

l) $\dfrac{6}{5-3\sqrt{2}}$

m) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

n) $\dfrac{4}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

o) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

p) $\dfrac{5}{2-\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

q) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$

r) $\dfrac{\sqrt[3]{9}-1}{\sqrt[3]{3}-1}$

37. Determine o valor da expressão $\dfrac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{2} - 1}$.

38. Simplifique:

a) $\sqrt{\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} + \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$

b) $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \dfrac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$

c) $\dfrac{\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{125}}{\sqrt{12} + \sqrt{108} - \sqrt{180}}$

d) $\sqrt{\dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{17 - 12\sqrt{2}}} - \sqrt{\dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{17 + 12\sqrt{2}}}$

39. Simplifique a expressão:

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

40. Simplifique a expressão $\dfrac{2a\sqrt{1 + x^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}}$, sabendo que $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$ $(0 < b < a)$.

41. Mostre que $\sqrt[3]{9(\sqrt[3]{2} - 1)} = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

42. Mostre que $\dfrac{3}{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}} + \dfrac{4}{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt{11 - 2\sqrt{30}}}$.

43. Calcule o valor de $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}$.

44. Qual o valor que se obtém ao subtrair $\dfrac{5}{8 - 3\sqrt{7}}$ de $\dfrac{12}{\sqrt{7} + 3}$?

IV. Potência de expoente racional

13. *Definição*

Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*$), define-se potência de base a e expoente $\dfrac{p}{q}$ pela relação:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Se $a = 0$ e $\frac{p}{q} > 0$, adotamos a seguinte definição especial:

$$0^{\frac{p}{q}} = 0$$

Exemplos

1º) $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

2º) $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

3º) $7^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{7^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{49}}$

4º) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-1}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

14. Observações

1ª) O símbolo $0^{\frac{p}{q}}$ com $\frac{p}{q} < 0$ não tem significado, pois $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $q \in \mathbb{N}^* \Rightarrow p < 0 \Rightarrow 0^p$ não tem significado.

2ª) Toda potência de base positiva e expoente racional é um número real positivo:

$$a > 0 \implies a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0$$

EXERCÍCIOS

45. Expresse na forma de potência de expoente racional os seguintes radicais:

a) $\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{27}$

d) $\sqrt{\sqrt{2}}$

e) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}$

f) $(\sqrt[3]{2^2})^2$

g) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

i) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\right)^2$

46. Calcule, substituindo as potências de expoente racional pelos correspondentes radicais:

a) $8^{\frac{1}{3}}$

b) $64^{\frac{-1}{2}}$

c) $(0,25)^{\frac{-1}{2}}$

d) $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

e) $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{-1}{5}}$

f) $27^{\frac{-2}{3}}$

g) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$

h) $(0,81)^{\frac{-1}{2}}$

i) $(0,01)^{-0,5}$

15. *Propriedades*

As propriedades (*P*) se verificam para as potências de expoente racional.

Se $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, então valem as seguintes propriedades:

P₁. $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$

P₂. $\dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}$

P₃. $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$

P₄. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$

P₅. $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$

Demonstrações

P₁. $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[qs]{a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps} \cdot a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}} =$

$= a^{\frac{ps + rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$

P₃. $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a \cdot b)^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$

P₅. $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{(a^{\frac{p}{q}})^r} = \sqrt[s]{(\sqrt[q]{a^p})^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{pr}}} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot r}} = a^{\frac{p \cdot r}{q \cdot s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$

Deixamos a demonstração das propriedades **P₂** e **P₄** como exercício.

EXERCÍCIOS

47. Simplifique, fazendo uso das propriedades (*P*):

a) $16^{\frac{3}{4}}$ b) $27^{\frac{-4}{3}}$ c) $(81^2)^{\frac{1}{4}}$

Solução

a) $16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$

b) $27^{\frac{-4}{3}} = (3^3)^{\frac{-4}{3}} = 3^{-4} = \frac{1}{81}$

c) $(81^2)^{\frac{1}{4}} = [(3^4)^2]^{\frac{1}{4}} = 3^2 = 9$

48. Simplifique fazendo uso das propriedades (P):

a) $9^{\frac{3}{2}}$

b) $8^{\frac{4}{3}}$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{-1}{2}}$

d) $64^{\frac{-2}{3}}$

e) $81^{-0,25}$

f) $256^{\frac{5}{4}}$

g) $1\,024^{\frac{1}{10}}$

h) $(16^{\frac{5}{4}})^{\frac{2}{5}}$

i) $(32^2)^{-0,4}$

j) $(343^{-2})^{\frac{1}{3}}$

k) $(243^{-2})^{\frac{-2}{5}}$

l) $(216^2)^{\frac{1}{3}}$

49. Simplifique:

a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{-1}{5}} \cdot 2^{\frac{4}{5}}$

b) $3^{\frac{-1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$

c) $\dfrac{5^{\frac{-1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{2}{5}} \cdot 5^{\frac{-3}{2}}}$

d) $\dfrac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{-2}{3}}}{3^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \cdot 3^{\frac{1}{60}}}$

e) $\dfrac{3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{-2}{3}}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{-2}{3}}}$

f) $(27^{\frac{2}{3}} - 27^{\frac{-2}{3}}) \cdot (16^{\frac{3}{4}} - 16^{\frac{-3}{4}})$

g) $(125^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 343^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$

50. Determine o valor da expressão $(0,064^{\frac{1}{3}})\ (0,0625^{\frac{1}{4}})$.

51. Determine o valor da expressão $5x^0 + 3x^{\frac{3}{4}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$, para $x = 16$.

52. Determine o valor da expressão $\frac{2}{3} \cdot 8^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}}$.

53. Simplifique, supondo $a > 0$ e $b > 0$:

a) $\left(n + \sqrt[3]{\sqrt[n-1]{a^2} \cdot \sqrt[n+1]{a^{-1}}} \right)^{n2-1}$

b) $a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{a^{\frac{-1}{2}} \cdot b^{-1}} \cdot \sqrt{a^{-1} \cdot b^{\frac{2}{3}}}$

c) $(a^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}) \cdot (a\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2a^2} + \sqrt[3]{4})$

d) $\dfrac{b - a}{a + b} \cdot \left[a^{\frac{1}{2}} \cdot (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^{-1} - \left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\right]$

e) $\sqrt{\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{-1}{2}} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{-1}{2}}\right]^{-2} + 1}$

f) $[(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{-1} + 3\sqrt{ab}]^{\frac{1}{2}}$

54. Se $a > 0$, mostre que:

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{8}} + 1} + \frac{1}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{8}} + 1} - \frac{2(a^{\frac{1}{4}} - 1)}{a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} + 1} = \frac{4}{a + \sqrt{a} + 1}$$

V. Potência de expoente irracional

16. Dados um número real $a > 0$ e um número irracional α, podemos construir, com base nas potências de expoente racional, um único número real positivo a^α que é a potência de base a e expoente irracional α.

Seja por exemplo a potência $3^{\sqrt{2}}$. Sabendo quais são os valores racionais aproximados por falta ou por excesso de $\sqrt{2}$, obtemos em correspondência os valores aproximados por falta ou por excesso de $3^{\sqrt{2}}$ (potências de base 3 e expoente racional, já definidas):

A_1	A_2	B_1	B_2
1	2	3^1	3^2
1,4	1,5	$3^{1,4}$	$3^{1,5}$
1,41	1,42	$3^{1,41}$	$3^{1,42}$
1,414	1,415	$3^{1,414}$	$3^{1,415}$
1,4142	1,4143	$3^{1,4142}$	$3^{1,4143}$

17. *Definição*

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e α um número irracional; consideremos os conjuntos

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\} \quad e \quad A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > \alpha\}$$

Notemos que:

a) todo número de A_1 é menor que qualquer número de A_2.

b) existem dois racionais r e s tais que $r < \alpha < s$ e a diferença $s - r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Em correspondência aos conjuntos A_1 e A_2, consideremos os conjuntos

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\}$$

e

$$B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}$$

Se $a > 1$, demonstra-se(*) que:

a) todo número de B_1 é menor que qualquer número de B_2.

b) existem dois números a^r e a^s tais que a diferença $a^s - a^r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Nessas condições, dizemos que a^r e a^s são aproximações por falta e por excesso, respectivamente, de a^α e que B_1 e B_2 são classes que definem a^α.

Se $0 < a < 1$, tudo acontece de forma análoga.

Exemplos de potências com expoente irracional:

$$2^{\sqrt{2}},\ 4^{\sqrt{3}},\ 5^{\pi},\ \left(\frac{2}{3}\right)^{1+\sqrt{2}},\ (7)^{-\sqrt{2}},\ (\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$$

18. Se $a = 0$ e α é irracional e positivo, daremos a seguinte definição especial:

$$0^\alpha = 0$$

19. *Observações*

1ª) Se $a = 1$, então $1^\alpha = 1$, $\forall$ α irracional.

2ª) Se $a < 0$ e α é irracional e positivo, então o símbolo a^α não tem significado. *Exemplos*: $(-2)^{\sqrt{2}}$, $(-5)^{\sqrt{3}}$ e $(-\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ não têm significado.

3ª) Se α é irracional e negativo ($\alpha < 0$), então 0^α não tem significado.

4ª) Para as potências de expoente irracional são válidas as propriedades (P).

(*) A demonstração está nas páginas 28, 29 e 30.

EXERCÍCIO

55. Simplifique:

a) $3 \cdot 2^{\sqrt{3}} \cdot 2^{-\sqrt{3}}$

b) $(2^{\sqrt[3]{3}})^{\sqrt[3]{2}}$

c) $(4^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{3}}$

d) $(3^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1}$

e) $2^{1+\sqrt{3}} \cdot 4^{-\sqrt{12}}$

f) $9^{\sqrt{2}} : 3^{\sqrt{8}}$

g) $(5^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} : 25^{\sqrt{2}-\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$

h) $(4^{\sqrt{5}} : 8^{\sqrt{20}})^{-1/\sqrt{5}}$

i) $\left(\dfrac{2^{\sqrt{27}} \cdot 8^{\sqrt{75}}}{4^{\sqrt{48}}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

VI. Potência de expoente real

20. Considerando que já foram definidas anteriormente as potências de base a ($a \in \mathbb{R}_+^*$) e expoente b (b racional ou irracional), então já está definida a potência a^b com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \in \mathbb{R}$.

21. Observações

1ª) Toda potência de base real e positiva e expoente real é um número positivo.

$$a > 0 \Rightarrow a^b > 0$$

2ª) Para as potências de expoente real são válidas as propriedades (P), isto é:

P_1. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ $\quad$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$)

P_2. $\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$ $\quad$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$)

P_3. $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$ $\quad$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $c \in \mathbb{R}$)

P_4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^c = \dfrac{a^c}{b^c}$ $\quad$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $c \in \mathbb{R}$)

P_5. $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ $\quad$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$)

EXERCÍCIOS

56. Simplifique a expressão $\frac{2^{n+4} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+3}}$, $\forall\, n,\ n \in \mathbb{R}$.

57. Determine o valor da expressão $(2^n + 2^{n-1})\,(3^n - 3^{n-1})$, para todo n.

58. Chamam-se cosseno hiperbólico de x e seno hiperbólico de x, e representam-se respectivamente por *cosh x* e *senh x*, os números:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Calcule $(\cosh x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2$.

LEITURA

Stifel, Bürgi e a Criação dos Logaritmos

Hygino H. Domingues

Ao se findar o século XVI, um dos grandes desafios da matemática consistia em encontrar meios de simplificar os cálculos aritméticos, de escoimá-los de erros, visando em especial às necessidades da astronomia. Alguns procedimentos então usados com essa finalidade estavam longe do ideal. Era o caso da *prostaférese* (adição e subtração em grego), consistindo na conversão de produtos em somas, mediante relações trigonométricas como $2 \cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$, por exemplo.

Esse ponto de estrangulamento seria eliminado com a criação dos logaritmos no século XVII. É interessante notar que, embora os logaritmos resultem da relação inversa da potenciação, à época em que surgiram ainda não se usavam expoentes em matemática. Sem dúvida são

dois os pais da idéia de logaritmo: John Napier (1550-1617) e Jobst Bürgi (1552-1632), em trabalhos independentes, quase concomitantes, o primeiro a partir de noções geométricas, o segundo a partir de noções algébricas. E há também os precursores, dos quais talvez o mais importante seja Michael Stifel (1487-1567).

Alemão da cidade de Esslinger, Stifel seguiu a carreira religiosa, inicialmente como monge agostiniano, mas acabou se convertendo às doutrinas de Lutero, de quem era amigo. Às tantas, certamente sem consultar seu líder religioso, anunciou o fim do mundo para 3/10/1533, baseando-se em interpretações de profecias bíblicas. Considerando-se sua grande reputação científica e a intensidade da fé naquela época, pode-se imaginar os transtornos causados por esse rebate falso. Tanto que Stifel teve que se refugiar numa prisão... De lá Lutero o salvou para a matemática.

Com efeito, em 1544 Stifel publicaria sua *Arithmetica integra*, o mais importante tratado de álgebra da Alemanha no século XVI. Nele aparece pela primeira vez o triângulo dos coeficientes do binômio, até os de ordem *17*, inclusive a fórmula recorrente entre eles hoje conhecida como *relação de Stifel*. E aparece também o embrião da idéia de logaritmo. Cotejando a progressão geométrica $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots$ com a progressão aritmética $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, Stifel observou que o produto (quociente) de dois termos quaisquer da primeira está associado à soma (diferença) dos respectivos da segunda. Mas, para que essa idéia fosse proveitosa, era preciso interpolar, numa e noutra, cópias associadas convenientes de números reais, algo muito difícil para a época.

O suíço Bürgi era um homem eclético. Dedicava-se à fabricação de relógios, mas era versado em matemática e astronomia, tendo mesmo colaborado com Kepler em Praga. Daí, provavelmente, sua preocupação em criar os logaritmos, embora fosse um exímio calculista.

Estimulado pelas idéias de Stifel, partiu de uma progressão aritmética de primeiro termo *0*, razão *10* e último termo *32 000*, cujos elementos chamou de *números vermelhos* (pela cor com que os imprimiu). A progressão geométrica correspondente começa com 10^8 e sua razão é $1 + 10^{-4}$ (notação atual) — seus termos são chamados *números negros*. A partir daí constrói o que na verdade é, na terminologia atual, uma tábua de antilogaritmos: os números vermelhos (logaritmos) são escritos na primeira linha e na coluna da esquerda e os negros correspondentes distribuídos pelas demais linhas e colunas. A escolha de *1,0001* como razão da P.G. objetivava fazer com que suas potências ficassem muito próximas entre si; e começar essa progressão com 10^8 era um expediente para evitar números decimais.

Bürgi inventou seus logaritmos por volta do ano 1600. Mas só em 1620 publicou um trabalho a respeito. Com isso ficou atrás de Napier na questão da prioridade sobre o assunto. (Ver pág. 55.)

1ª parte da tabela de antilogaritmos de Bürgi
(logaritmos em vermelho; antilogaritmos em preto)

	0	500	1 000	1 500	2 000
0	100000000	100501227	101004966	101511230	102020032
10	10000	11277	15067	21381	30234
20	20001	21328	25168	31534	40437
30	30003	31380	35271	41687	50641

CAPÍTULO II

Função Exponencial

I. Definição

22. Dado um número real a, tal que $0 < a \neq 1$, chamamos função exponencial de base a a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número a^x.

Em símbolos: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow a^x$$

Exemplos de funções exponenciais em $\mathbb{R}$

a) $f(x) = 2^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $h(x) = 3^x$

d) $p(x) = 10^x$

e) $r(x) = (\sqrt{2})^x$

II. Propriedades

1ª) Na função exponencial $f(x) = a^x$, temos:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = a^0 = 1$$

isto é, o par ordenado $(0, 1)$ pertence à função para todo $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Isto significa que o gráfico cartesiano de toda função exponencial corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

2ª) A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ $(0 < a < 1)$. Portanto, dados os reais x_1 e x_2, temos:

I) quando $a > 1$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

II) quando $0 < a < 1$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

A demonstração desta propriedade exige a seqüência de lemas e teoremas apresentados nos itens 23 a 30.

3ª) A função exponencial $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$, é injetora pois, dados x_1 e x_2 tais que $x_1 \neq x_2$ (por exemplo $x_1 < x_2$), vem:

se $a > 1$, temos: $f(x_1) < f(x_2)$
se $0 < a < 1$, temos: $f(x_1) > f(x_2)$.

e, portanto, nos dois casos, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

23. Lema 1

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$a^n > 1 \text{ se, e somente se, } n > 0.$$

Demonstração

1ª parte

Provemos, por indução sobre n, a proposição: $n > 0 \Rightarrow a^n > 1$:

1º) é verdadeira para $n = 1$, pois $a^1 = a > 1$;

2º) suponhamos que a proposição seja verdadeira para $n = p$, isto é, $a^p > 1$, e provemos que é verdadeira para $n = p + 1$.

De fato, de $a > 1$, multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a^p e mantendo a desigualdade, pois a^p é positivo, temos:

$$a > 1 \Rightarrow a \cdot a^p > a^p \Rightarrow a^{p+1} > a^p > 1$$

2ª parte

Provemos, por redução ao absurdo, a proposição:

$$a^n > 1 \Rightarrow n > 0$$

Supondo $n \leqslant 0$, temos: $-n \geqslant 0$.

Notemos que $n = 0 \Rightarrow a^0 = 1$ e pela primeira parte $-n > 0 \Rightarrow a^{-n} > 1$; portanto:

$$-n \geqslant 0 \Rightarrow a^{-n} \geqslant 1$$

Multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por a^n e mantendo o sentido da desigualdade, pois a^n é positivo, temos:

$$a^{-n} \geqslant 1 \Rightarrow a^n \cdot a^{-n} \geqslant a^n \Rightarrow 1 \geqslant a^n$$

o que é um absurdo, pois contraria a hipótese $a^n > 1$. Logo, $n > 0$.

24. Lema 2

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$, temos:

$a^r > 1$ se, e somente se, $r > 0$.

Demonstração

1.ª parte

Provemos a proposição $r > 0 \Rightarrow a^r > 1$.

Façamos $r = \dfrac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}^*$; então:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}}$$

Pelo lema 1, se $a = (a^{\frac{1}{q}})^q > 1$ e $q > 0$, então $a^{\frac{1}{q}} > 1$. Ainda pelo mesmo lema, se $a^{\frac{1}{q}} > 1$ e $p > 0$, então $(a^{\frac{1}{q}})^p > 1$, ou seja,

$$(a^{\frac{1}{q}})^p = a^{\frac{p}{q}} = a^r > 1$$

2.ª parte

Provemos agora a proposição: $a^r > 1 \Rightarrow r > 0$.

Façamos $r = \dfrac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$; então:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$$

Supondo $q > 0$ e considerando que na 1ª parte provamos que $a^{\frac{1}{q}} > 1$, temos, pelo lema 1:

$$a^{\frac{1}{q}} > 1 \text{ e } (a^{\frac{1}{q}})^p > 1 \Rightarrow p > 0$$

Logo: $\quad q > 0 \quad e \quad p > 0 \Rightarrow r = \dfrac{p}{q} > 0$

Supondo, agora, $q < 0$, isto é, $-q > 0$, pelo lema 1 temos:

$$a^{-\frac{1}{q}} > 1 \quad e \quad (a^{\frac{1}{q}})^p = (a^{-\frac{1}{q}})^{-p} > 1 \Rightarrow -p > 0 \Rightarrow p < 0$$

Logo: $\quad q < 0 \quad e \quad p < 0 \Rightarrow r = \dfrac{p}{q} > 0$

25. *Lema 3*

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, r e s racionais, temos:

$a^s > a^r$ se, e somente se, $s > r$.

Demonstração

$$a^s > a^r \Leftrightarrow a^s \cdot a^{-r} > a^r \cdot a^{-r} \Leftrightarrow a^{s-r} > 1 \overset{\text{(lema 2)}}{\Longleftrightarrow} s - r > 0 \Leftrightarrow s > r$$

26. *Lema 4*

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, temos:

$a^\alpha > 1$ se, e somente se, $\alpha > 0$.

Demonstração

Sejam os dois conjuntos que definem o número irracional α,

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\} \quad e \quad A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > \alpha\}$$

e em correspondência os conjuntos de potências de expoentes racionais que definem a^α,

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \quad e \quad B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}$$

1ª parte

Provemos a proposição:

$$\alpha > 0 \Rightarrow a^\alpha > 1$$

Pela definição do número α irracional e positivo, existem $r \in A_1$ e $s \in A_2$ tal que $0 < r < \alpha < s$.

Pelo lema 2, como $a > 1$, $r > 0$ e $s > 0$, temos: $a^r > 1$ e $a^s > 1$.

Pelo lema 3, como $a > 1$ e $r < s$, temos: $1 < a^r < a^s$ e, agora, pela definição de potência de expoente irracional, vem:

$$1 < a^r < a^\alpha < a^s$$

isto é,

$$a^\alpha > 1$$

2ª parte

Provemos, agora, por redução ao absurdo, a proposição:

$$a^\alpha > 1 \Rightarrow \alpha > 0$$

Suponhamos $\alpha < 0$, isto é, $-\alpha > 0$.

Pela primeira parte deste teorema, temos:

$$\left.\begin{array}{r} a > 1, -\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ -\alpha > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a^{-\alpha} > 1$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade obtida por $a^\alpha > 0$, vem:

$$a^{-\alpha} \cdot a^\alpha > a^\alpha$$

isto é,

$$1 > a^\alpha$$

o que contraria a hipótese; logo:

$$\alpha > 0$$

27. Teorema 1

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^b > 1 \text{ se, e somente se, } b > 0.$$

Demonstração

$$b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \mathbb{Q} \overset{\text{(lema 2)}}{\Longleftrightarrow} (a^b > 1 \Leftrightarrow b > 0) \\ \text{ou} \\ b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \overset{\text{(lema 4)}}{\Longleftrightarrow} (a^b > 1 \Leftrightarrow b > 0) \end{cases}$$

28. Teorema 2

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$a^{x_1} > a^{x_2}$ se, e somente se, $x_1 > x_2$.

Demonstração

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1 \overset{\text{(teorema 1)}}{\Longleftrightarrow} x_1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

29. Teorema 3

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ e $b \in \mathbb{R}$, temos:

$a^b > 1$ se, e somente se, $b < 0$.

Demonstração

Se $0 < a < 1$, então $\frac{1}{a} > 1$.

Seja $c = \frac{1}{a} > 1$; pelo teorema 1, vem:

$$c^{-b} > 1 \Leftrightarrow -b > 0$$

Substituindo $c = \frac{1}{a}$, temos:

$$c^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-b} = a^b > 1 \Leftrightarrow b < 0$$

30. Teorema 4

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$a^{x_1} > a^{x_2}$ se, e somente se, $x_1 < x_2$.

Demonstração

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1 \overset{\text{(teorema 3)}}{\Longleftrightarrow} x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

EXERCÍCIO

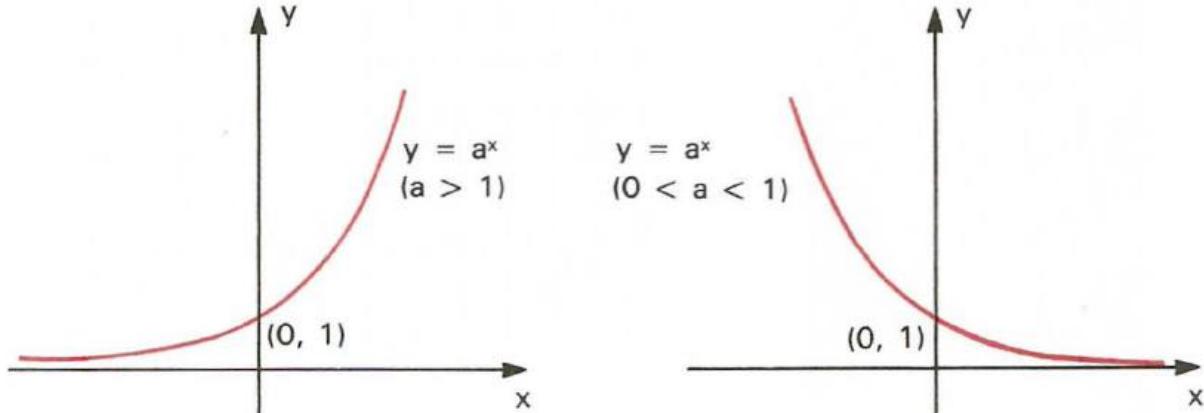
59. Determine o menor valor da expressão $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-x^2}$

III. Imagem

31. Vimos anteriormente, no estudo de potências de expoente real, que se $a \in \mathbb{R}_+^*$, então $a^x > 0$ para todo x real.

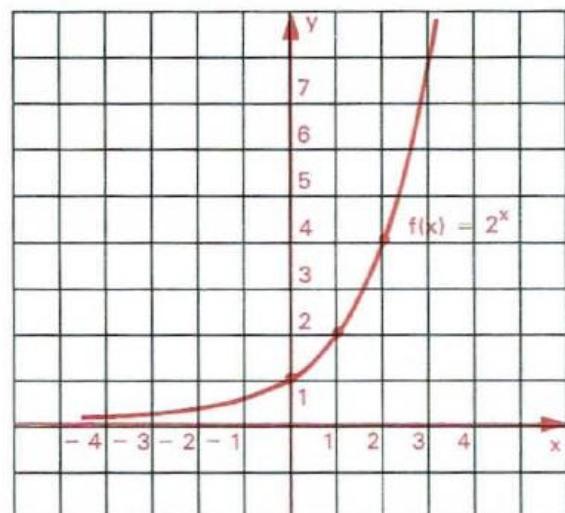
Afirmamos, então, que a imagem da função exponencial é:

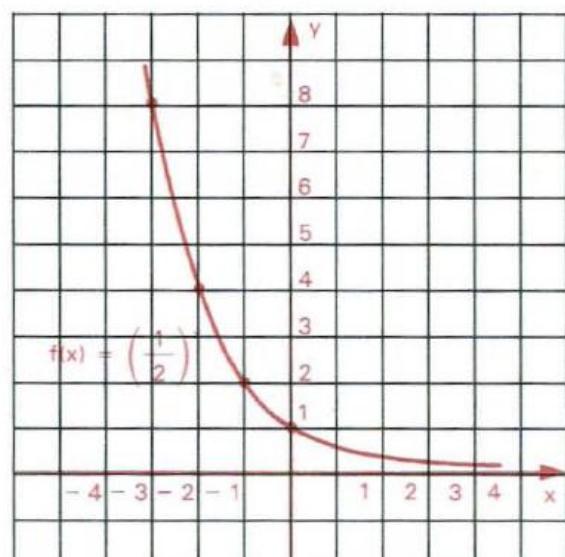
$$\text{Im} = \mathbb{R}_+^*$$

IV. Gráfico

32. Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = a^x$, podemos dizer:

1º) a curva representativa está toda acima do eixo dos x, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2º) corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

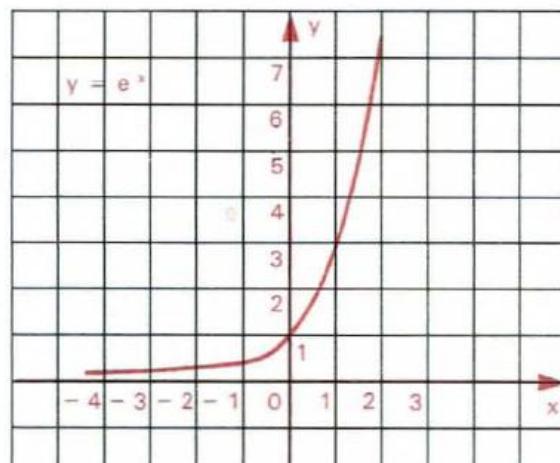
3º) se $a > 1$ é o de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é o de uma função decrescente,

4º) toma um dos aspectos da figura abaixo.

33. *Exemplos*

1º) Construir o gráfico da função exponencial de base 2, $f(x) = 2^x$.

x	$y = 2^x$
−3	$\frac{1}{8}$
−2	$\frac{1}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

2º) Construir o gráfico da função exponencial da base $\frac{1}{2}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

3º) Construir o gráfico da função exponencial de base e, $f(x) = e^x$.

Um número irracional importantíssimo para a análise matemática é indicado pela letra e e definido pela relação:

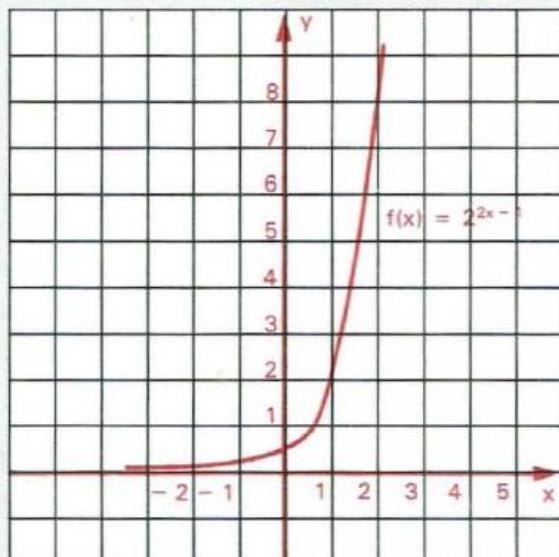
$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}, \ x \in \mathbb{R}$$

A demonstração de que o citado limite existe será feita quando fizermos o estudo de limites. A tabela abaixo sugere um valor para e (com quatro casas decimais): $e \cong 2,7183$.

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$(1+1)^1 = 2$	$(1+0,1)^{10} = 2,594$	$(1+0,01)^{100} = 2,705$	2,717	2,7182	2,7183

x	e^x
−3	0,05
−2,5	0,08
−2	0,14
−1,5	0,22
−1	0,36
−0,5	0,60
0	1
0,5	1,65
1	2,72
1,5	4,48
2	7,39
2,5	12,18
3	20,80

EXERCÍCIOS

60. Construa os gráficos cartesianos das seguintes funções exponenciais:

a) $y = 3^x$
b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
c) $y = 4^x$
d) $y = 10^x$
e) $y = 10^{-x}$
f) $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

61. Construa o gráfico cartesiano da função em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^{2x-1}$.

Solução

Vamos construir uma tabela da seguinte maneira: atribuímos valores a $2x - 1$, calculamos 2^{2x-1} e finalmente x.

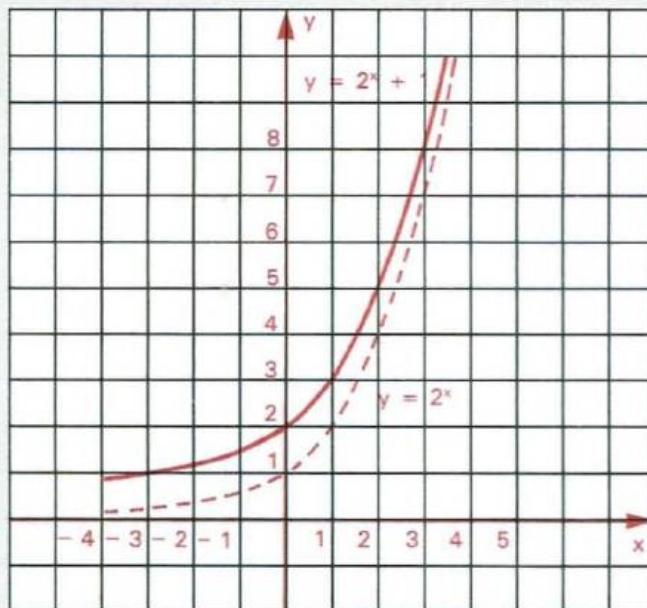
x	$2x-1$	$y=2^{2x-1}$
-1	-3	$\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{4}$
0	-1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0	1
1	1	2
$\frac{3}{2}$	2	4
2	3	8

62. Construa os gráficos das funções em $\mathbb{R}$ definidas por:

a) $f(x) = 2^{1-x}$
b) $f(x) = 3^{\frac{x+1}{2}}$
c) $f(x) = 2^{|x|}$
d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$
e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

63. Represente graficamente a função $f(x) = e^{x^2}$.

64. Represente graficamente a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-x^2}$.

65. Construa o gráfico da função em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x + 1$.

Solução

x	2^x	$y = 2^x + 1$
−3		
−2		
−1		
0		
1		
2		
3		

x	2^x	$y = 2^x + 1$
−3	$\frac{1}{8}$	
−2	$\frac{1}{4}$	
−1	$\frac{1}{2}$	
0	1	
1	2	
2	4	
3	8	

x	2^x	$y = 2^x + 1$
−3	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{8}$
−2	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	1	2
1	2	3
2	4	5
3	8	9

Notemos que o gráfico deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o valor de 2^x mais uma unidade. Assim, se cada 2^x sofre um acréscimo de 1, tudo se passa como se a exponencial $y = 2^x$ sofresse uma translação de uma unidade "para cima".

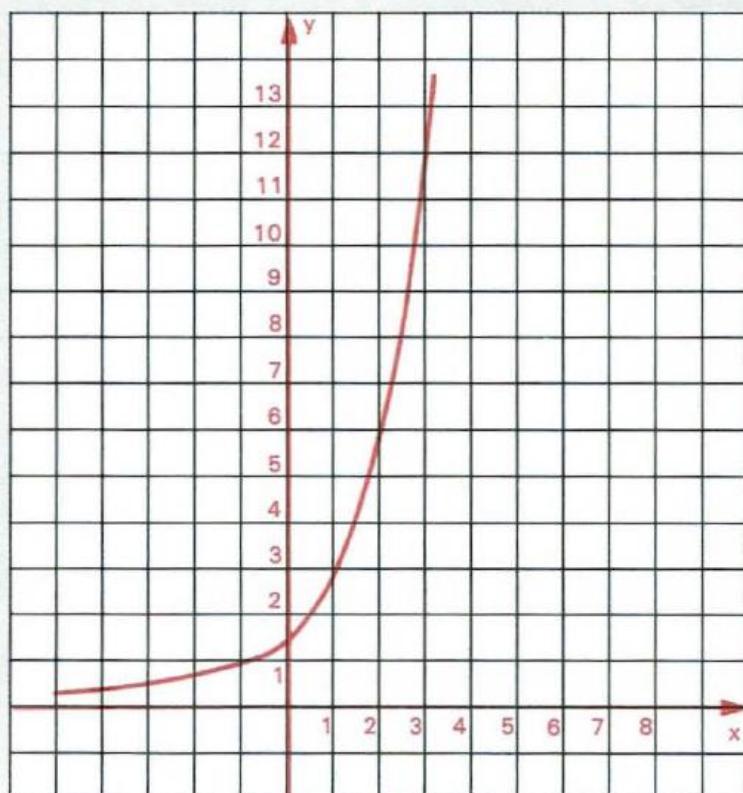
66. Construa os gráficos das funções em $\mathbb{R}$ definidas por:

a) $f(x) = 2^x - 3$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

c) $f(x) = 2 - 3^x$

d) $f(x) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$

67. Construa os gráficos das funções em $\mathbb{R}$ definidas por:

a) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ b) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

68. Construa o gráfico da função em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$.

Solução

Vamos construir uma tabela dando valores a $x - 1$ e calculando 2^{x-1}, $3 \cdot 2^{x-1}$ e x. Temos:

x	x − 1	2^{x-1}	$y = 3 \cdot 2^{x-1}$
−2	−3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
−1	−2	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
0	−1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
1	0	1	3
2	1	2	6
3	2	4	12
4	3	8	24

69. Construa os gráficos das funções em $\mathbb{R}$ definidas por:

a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x$

b) $f(x) = 0,1 \cdot 2^{2x-3}$

c) $f(x) = \frac{1}{5} \cdot 3^{2x-1}$

d) $f(x) = 3 \cdot 2^{\frac{x+1}{2}}$

V. Equações exponenciais

34. *Definição*

Equações exponenciais são equações com incógnita no expoente.

Exemplos

$$2^x = 64, \ (\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}, \ 4^x - 2^x = 2.$$

Existem dois métodos fundamentais para resolução das equações exponenciais.

Faremos a apresentação agora do primeiro método, sendo que o segundo será apresentado quando do estudo de logaritmos.

35. *Método da redução a uma base comum*

Este método, como o próprio nome já diz, será aplicado quando ambos os membros da equação, com as transformações convenientes baseadas nas propriedades de potências, forem redutíveis a potências de mesma base a $(0 < a \neq 1)$. Pelo fato de a função exponencial $f(x) = a^x$ ser injetora, podemos concluir que potências iguais e de mesma base têm os expoentes iguais, isto é:

$$a^b = a^c \Leftrightarrow b = c \quad (0 < a \neq 1)$$

EXERCÍCIOS

70. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 64$

b) $8^x = \frac{1}{32}$

c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$

Solução

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \dfrac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \dfrac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$

$S = \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81} \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \sqrt[3]{3^4} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{3}$

$S = \left\{\dfrac{8}{3}\right\}$

71. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 128$

b) $3^x = 243$

c) $2^x = \dfrac{1}{16}$

d) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x = 125$

e) $(\sqrt[3]{2})^x = 8$

f) $(\sqrt[4]{3})^x = \sqrt[3]{9}$

g) $9^x = 27$

h) $4^x = \dfrac{1}{8}$

i) $\left(\dfrac{1}{125}\right)^x = 25$

j) $(\sqrt[5]{4})^x = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$

k) $100^x = 0{,}001$

l) $8^x = 0{,}25$

m) $125^x = 0{,}04$

n) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 2{,}25$

72. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^{3x-1} = 32$

b) $7^{4x+3} = 49$

c) $11^{2x+5} = 1$

d) $2^{x^2-x-16} = 16$

e) $3^{x^2+2x} = 243$

f) $5^{2x^2+3x-2} = 1$

g) $81^{1-3x} = 27$

h) $7^{3x+4} = 49^{2x-3}$

i) $5^{3x-1} = \left(\dfrac{1}{25}\right)^{2x+3}$

j) $(\sqrt{2})^{3x-1} = (\sqrt[3]{16})^{2x-1}$

k) $8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^{x-1}}$

l) $4^{x^2-1} = 8^x$

m) $27^{x^2+1} = 9^{5x}$

n) $8^{x^2-x} = 4^{x+1}$

73. Resolva a equação $4^{x^2+4x} = 4^{12}$.

74. Determine os valores de x que satisfazem a equação $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1\,000^5}$.

75. Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$

c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

Solução

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$,

$S = \{2, -1\}$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot (3^2)^{3x+4} = (3^3)^{x+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot 3^{6x+8} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow 3^{8x+7} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x + 7 = 3x + 3 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}, \qquad S = \left\{-\frac{4}{5}\right\}$

c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} = \sqrt[2x]{5^{3x-2}} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{2}} \cdot (5^2)^{\frac{2x-5}{x}} = 5^{\frac{3x-2}{2x}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{2} + \frac{4x-10}{x}} = 5^{\frac{3x-2}{2x}} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} + \frac{4x-10}{x} = \frac{3x-2}{2x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -6$ (não serve pois $x > 0$)

$S = \{3\}$

76. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $(2^x)^{x+4} = 32$

b) $(9^{x+1})^{x-1} = 3^{x^2+x+4}$

c) $2^{3x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^{3-x}$

d) $(3^{2x-7})^3 : 9^{x+1} = (3^{3x-1})^4$

e) $2^{3x+2} : 8^{2x-7} = 4^{x-1}$

f) $\frac{3^{x+2} \cdot 9^x}{243^{5x+1}} = \frac{81^{2x}}{27^{3-4x}}$

g) $\sqrt[x+4]{2^{3x-8}} = 2^{x-5}$

h) $8^{3x} = \sqrt[3]{32^x} : 4^{x-1}$

i) $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} - \sqrt[3x-7]{8^{x-3}} = 0$

j) $\sqrt{8^{x-1}} \cdot \sqrt[x+1]{4^{2x-3}} = \sqrt[6]{2^{5x+3}}$

77. Determine os valores de x que satisfazem a equação $(4^{3-x})^{2-x} = 1$.

78. Resolva a equação exponencial: $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120$.

Solução

Resolvemos colocando 2^{x-1} em evidência:

$2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^{x-1}(1 + 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4) = 120 \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot 15 = 120 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^{x-1} = 8 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$, $S = \{4\}$.

79. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 306$
b) $5^{x-2} - 5^x + 5^{x+1} = 505$
c) $2^{3x} + 2^{3x+1} + 2^{3x+2} + 2^{3x+3} = 240$
d) $5^{4x-1} - 5^{4x} - 5^{4x+1} + 5^{4x+2} = 480$
e) $3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+3} - 2^{x+5} = 2$
f) $2 \cdot 4^{x+2} - 5 \cdot 4^{x+1} - 3 \cdot 2^{2x+1} - 4^x = 20$

80. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $4^x - 2^x = 56$
b) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$

Solução

a) $4^x - 2^x = 56 \Leftrightarrow (2^2)^x - 2^x - 56 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 56 = 0$
Empregando uma incógnita auxiliar, isto é, pondo $2^x = y$, temos:
$y^2 - y - 56 = 0 \Leftrightarrow y = 8$ ou $y = -7$.
Observemos que $y = -7$ não convém, pois $y = 2^x > 0$.
De $y = 8$, temos: $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$.
$S = \{3\}$.

b) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$
Pondo $2^x = y$, temos:
$4y^2 - 9y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = \frac{1}{4}$
mas $y = 2^x$; então:
$2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ ou $2^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -2$.
$S = \{1, -2\}$.

81. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $4^x - 2^x - 2 = 0$
b) $9^x + 3^x = 90$
c) $4^x - 20 \cdot 2^x + 64 = 0$
d) $4^x + 4 = 5 \cdot 2^x$
e) $9^x + 3^{x+1} = 4$
f) $5^{2x} + 5^x + 6 = 0$
g) $2^{2x} + 2^{x+1} = 80$
h) $10^{2x-1} - 11 \cdot 10^{x-1} + 1 = 0$
i) $4^{x+1} + 4^{3-x} = 257$
j) $5 \cdot 2^{2x} - 4^{2x - \frac{1}{2}} - 8 = 0$

82. Resolva a equação $25^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125$.

83. Calcule o produto das soluções da equação $4^{x^2+2} - 3 \cdot 2^{x^2+3} = 160$.

84. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $3^x - \dfrac{15}{3^{x-1}} + 3^{x-3} = \dfrac{23}{3^{x-2}}$

b) $2^{x+1} + 2^{x-2} - \dfrac{3}{2^{x-1}} = \dfrac{30}{2^x}$

c) $16^{2x+3} - 16^{2x+1} = 2^{8x+12} - 2^{6x+5}$

85. Resolva a equação exponencial:

$$3^{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{81}{3^{\left(x + \frac{1}{x}\right)}}$$

86. Determine o número de soluções distintas da equação $2^x - 2^{-x} = k$, para k real.

87. Resolva a equação exponencial:

$$\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$$

88. Resolva a equação exponencial:

$$4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

89. Resolva a equação:

$$3^{x-1} - \frac{5}{3^{x+1}} = 4 \cdot 3^{1-3x}$$

90. Resolva a equação:

$$8^x - 3 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$$

91. Resolva as equações em $\mathbb{R}_+$:

a) $x^{x^2-5x+6} = 1$

b) $x^{2x^2-7x+4} = x$

Solução

a) Devemos examinar inicialmente se *0* ou *1* são soluções da equação.
Substituindo $x = 0$ na equação proposta, temos:

$$0^6 = 1 \quad \text{(falso)}$$

logo, *0* não é solução.
Substituindo $x = 1$ na equação, temos:

$$1^2 = 1 \quad \text{(verdadeiro)}$$

logo, *1* é solução da equação.
Supondo agora $0 < x \neq 1$, temos:
$x^{x^2-5x+6} = 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 3$
Os valores $x = 2$ ou $x = 3$ são soluções, pois satisfazem a condição $0 < x \neq 1$.
$S = \{1, 2, 3\}$.

b) Examinemos inicialmente se *0* ou *1* são soluções da equação proposta:

$$0^4 = 0 \text{ (verdadeiro)} \Rightarrow x = 0 \text{ é solução}$$
$$1^{-1} = 1 \text{ (verdadeiro)} \Rightarrow x = 1 \text{ é solução.}$$

Supondo $0 < x \neq 1$, temos:
$x^{2x^2-7x+4} = x \Rightarrow 2x^2 - 7x + 4 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = \frac{1}{2}$.

Os valores $x = 3$ ou $x = \frac{1}{2}$ são soluções, pois satisfazem a condição $0 < x \neq 1$.
$S = \left\{0, 1, 3, \frac{1}{2}\right\}$.

92. Resolva as equações em $\mathbb{R}_+$:

a) $x^{2-3x} = 1$

b) $x^{2x+5} = 1$

c) $x^{x^2-2} = 1$

d) $x^{x^2-7x+12} = 1$

e) $x^{x^2-3x-4} = 1$

93. Resolva as equações em $\mathbb{R}_+$:

a) $x^x = x$

b) $x^{x+1} = x$

c) $x^{4-2x} = x$

d) $x^{2x^2-5x+3} = x$

e) $x^{x^2-2x-7} = x$

94. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $(x^2 - x + 1)^{(2x^2-3x-2)} = 1$.

95. Determine o conjunto solução da equação $x^{x^3-8} = 1$.

96. Determine o número de soluções de $2^x = x^2$.
Sugestão: Faça os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$.
Observe que $2^{100} > 100^2$.

97. Resolva em $\mathbb{R}_+$ a equação $x^{2x} - (x^2 + x)\, x^x + x^3 = 0$.

98. Resolva a equação $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$.

Solução

Dividindo por 9^x, temos:

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \iff \frac{4^x}{9^x} + \frac{6^x}{9^x} = 2 \iff \left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{6}{9}\right)^x - 2 = 0 \iff$$

$$\iff \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$$

Fazendo $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, temos:

$$y^2 + y - 2 = 0 \iff \begin{cases} y = 1 \\ \text{ou} \\ y = -2 \quad \text{(não convém)} \end{cases}$$

mas $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, então:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \iff x = 0$$

$S = \{0\}$.

99. Resolva as equações:

a) $4^x + 2 \cdot 14^x = 3 \cdot 49^x$

b) $2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} = 0$

100. Resolva os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} 4^x = 16y \\ 2^{x+1} = 4y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^{2(x^2-y)} = 100 \cdot 5^{2(y-x^2)} \\ x + y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 24 \\ x + y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3^x - 2^{(y^2)} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\left(\frac{y^2}{2}\right)} = 7 \end{cases}$

101. Se $\begin{cases} 3^{x+y} = 1 \\ 2^{x+2y} = 2 \end{cases}$, calcule o valor de $x - y$.

102. Calcule o produto das soluções das equações:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108 \\ 4^x \cdot 2^y = 128 \end{cases}$$

103. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} x^{y^2-15y+56} = 1 \\ y - x = 5 \end{cases}$$

104. Resolva os sistemas de equações para $x \in \mathbb{R}_+$ e $y \in \mathbb{R}_+$.

a) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^3 = y^2 \end{cases}$

105. Resolva o sistema de equações para $x > 0$ e $y > 0$ e sendo $m \cdot n > 0$:

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^m = y^n \end{cases}$$

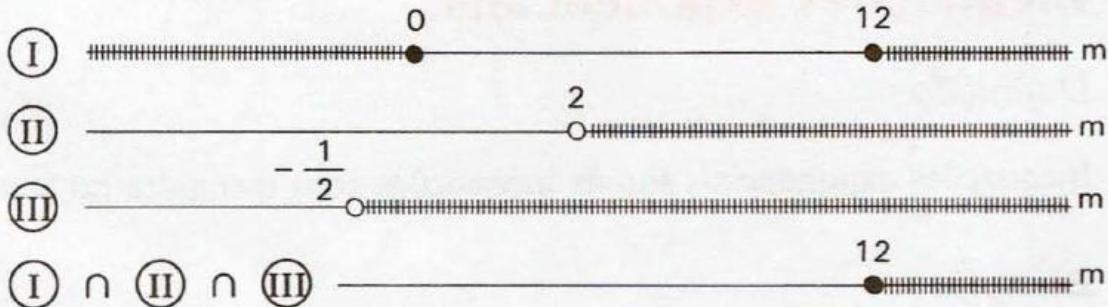
106. Para que valores reais de m a equação $4^x - (m - 2) \cdot 2^x + 2m + 1 = 0$ admite pelo menos uma raiz real?

Solução

Pondo $2^x = y$, temos:

$$y^2 - (m - 2)\,y + (2m + 1) = 0$$

Lembrando que a equação exponencial admitirá pelo menos uma raiz real se existir $y = 2^x > 0$, a equação acima deverá ter pelo menos uma raiz real e positiva.

Sendo $f(y) = y^2 - (m - 2)y + (2m + 1)$, temos:

a) as duas raízes são positivas:

$$y_1 \geqslant y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geqslant 0,\ \frac{S}{2} > 0 \text{ e } a \cdot f(0) > 0$$

$$\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 12m \geqslant 0 \Rightarrow m \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad m \geqslant 12 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{S}{2} > 0 \Rightarrow \frac{S}{2} = \frac{m - 2}{2} > 0 \Rightarrow m > 2 \qquad \text{(II)}$$

$$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow a \cdot f(0) = 2m + 1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{2} \qquad \text{(III)}$$

$S_1 = \{m \in \mathbb{R} \mid m \geqslant 12\}$

b) somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geqslant y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) = 2m + 1 < 0 \Rightarrow m < -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_2 = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m < -\dfrac{1}{2}\right\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow S = m - 2 > 0 \text{ e } f(0) = \\ = 2m + 1 = 0 \Rightarrow m > 2 \text{ e } m = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow S_3 = \varnothing \end{cases}$$

O conjunto dos valores de *m*, para que a equação exponencial proposta admita pelo menos uma raiz real, é:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m < -\frac{1}{2} \text{ ou } m \geqslant 12\right\}.$$

107. Determine *m* real para que as equações abaixo admitam pelo menos uma raiz real.

a) $3^{2x} - (2m + 3) \cdot 3^x + (m + 3) = 0$

b) $2^{2x+1} - (2m - 3) \cdot 2^{x+1} + (7 - 2m) = 0$

c) $m \cdot 9^x - (2m + 1)\, 3^x + (m - 1) = 0$

108. Determine *m* real para que a equação $m\,(2^x - 1)^2 - 2^x\,(2^x - 1) + 1 = 0$ admita pelo menos uma raiz real.

109. Para que valores reais de *m* a equação $2^x + 2^{-x} = m$ admite pelo menos uma raiz real?

110. Para que valores reais de *m* a equação $\dfrac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = m$, com $0 < a \neq 1$, admite raiz real?

111. Mostre que a equação

$$a^{2x} - (m + 1)\, a^x + (m - 1) = 0, \text{ com } 0 < a \neq 1,$$

admite pelo menos uma raiz real, qualquer que seja *m* real.

VI. Inequações exponenciais

36. Definição

Inequações exponenciais são as inequações com incógnita no expoente.

Exemplos

$$2^x > 32,\ (\sqrt{5})^x > \sqrt[3]{25},\ 4^x - 2 > 2^x.$$

Assim como em equações exponenciais, existem dois métodos fundamentais para resolução das inequações exponenciais.

Do mesmo modo usado no estudo de equações exponenciais, faremos a apresentação agora do primeiro método e o segundo será visto no estudo de logaritmos.

37. Método da redução a uma base comum

Este método será aplicado quando ambos os membros da inequação puderem ser representados como potências de mesma base a ($0 < a \neq 1$).

Lembremos que a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente, se $a > 1$, ou decrescente, se $0 < a < 1$; portanto:

> Se b e c são números reais, então:
> para $a > 1$ tem-se $a^b > a^c \Leftrightarrow b > c$
> para $0 < a < 1$ tem-se $a^b > a^c \Leftrightarrow b < c$.

EXERCÍCIOS

112. Classifique em V ou F as seguintes sentenças:

a) $3^{2,7} > 1$

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1,5} > 1$

c) $(0,3)^{0,2} > 1$

d) $\left(\frac{7}{5}\right)^{-0,32} < 1$

e) $\pi^{\sqrt{2}} > 1$

f) $e^{-\sqrt{3}} > 1$

113. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) as seguintes sentenças:

a) $2^{1,3} > 2^{1,2}$

b) $(0,5)^{1,4} > (0,5)^{1,3}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2,3} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-1,7}$

d) $\left(\frac{5}{4}\right)^{3,1} < \left(\frac{5}{4}\right)^{2,5}$

e) $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} < (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$

f) $(0,11)^{-3,4} < (0,11)^{4,2}$

g) $e^{2,7} > e^{2,4}$

h) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{4,3} < \left(\frac{1}{\pi}\right)^{-1,5}$

i) $(\sqrt[3]{3})^{\frac{3}{4}} > (\sqrt[3]{3})^{\frac{2}{3}}$

j) $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{3}{5}} < \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{5}{7}}$

114. Classifique em V ou F as seguintes sentenças:

a) $2^{0,4} > 4^{0,3}$

b) $8^{1,2} > 4^{1,5}$

c) $9^{3,4} < 3^{2,3}$

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{5,4} < \left(\frac{1}{8}\right)^{1,6}$

e) $(\sqrt[3]{3})^{-0,5} < 27^{-0,1}$

f) $(\sqrt{8})^{-1,2} > (\sqrt[3]{4})^{2,1}$

g) $8^{-1,2} > 0,25^{2,2}$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2,5} < (2,25)^{-1,2}$

115. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $2^x > 128$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geqslant \frac{125}{27}$

c) $(\sqrt[3]{2})^x < \sqrt[4]{8}$

Solução

a) $2^x > 128 \Leftrightarrow 2^x > 2^7$
Como a base é maior que 1, vem $x > 7$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$.

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geqslant \frac{125}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$
Como a base está compreendida entre 0 e 1, temos $x \leqslant -3$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3\}$.

c) $(\sqrt[3]{2})^x < \sqrt[4]{8} \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{3}} < 2^{\frac{3}{4}}$
Como a base é maior que 1, temos: $\frac{x}{3} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow x < \frac{9}{4}$.
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{9}{4}\right\}$.

116. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $2^x < 32$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{81}$

c) $3^x < \frac{1}{27}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \geqslant 125$

e) $(\sqrt[3]{3})^x \leqslant \frac{1}{9}$

f) $(\sqrt{2})^x > \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$

g) $4^x \geqslant 8$

h) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \leqslant 243$

i) $(\sqrt[5]{25})^x < \frac{1}{\sqrt[4]{125}}$

j) $(0{,}01)^x \leqslant \frac{1}{\sqrt{1\,000}}$

k) $(0{,}008)^x > \sqrt[3]{25}$

l) $0{,}16^x > \sqrt[5]{15{,}625}$

117. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $3^{2x+3} > 243$

b) $2^{5x-1} \geqslant 8$

c) $(0{,}1)^{3-4x} < 0{,}0001$

d) $7^{5x-6} < 1$

e) $(0{,}42)^{1-2x} \geqslant 1$

f) $3^{x^2-5x+6} > 9$

g) $2^{x^2-x} \leqslant 64$

h) $(0{,}3)^{x^2-2x-8} \geqslant 1$

i) $4^{x^2+1} \leqslant 32^{1-x}$

j) $27^{x^2-3} > 9$

k) $(0{,}01)^{2x^2+1} \geqslant (0{,}001)^{3x}$

l) $8^{3x^2-5x} > \frac{1}{16}$

m) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-1} < \left(\frac{1}{32}\right)^{2x+1}$

n) $(\sqrt{0{,}7})^{x^2+1} \geqslant (\sqrt[3]{0{,}7})^{2x+1}$

118. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+5x+1} \geqslant \frac{1}{2}$.

119. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $8 < 2^x < 32$

b) $0{,}0001 < (0{,}1)^x < 0{,}01$

c) $\frac{1}{27} < 3^x < 81$

d) $\frac{1}{8} \leqslant 4^x \leqslant 32$

e) $\frac{8}{27} < \left(\frac{4}{9}\right)^x < \frac{3}{2}$

f) $0{,}1 < 100^x < 1\,000$

g) $4 < 8^{|x|} < 32$

h) $25 < 125^{2x-1} < 125$

i) $(0{,}3)^{x-5} \leqslant (0{,}09)^{2x+3} \leqslant (0{,}3)^{x+6}$

j) $1 \leqslant 7^{x^2-4x+3} \leqslant 343$

k) $3^{x^2-3} < 3^{x^2-5x+6} < 9$

120. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $(3^x)^{2x-7} > \frac{1}{27}$

b) $\left(\frac{1}{2^x}\right)^{3x+1} \cdot 4^{1+2x-x^2} \geqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$

c) $7^{\frac{x+1}{x-1}} : 7^{\frac{x-1}{x+1}} < \sqrt{343}$

Solução

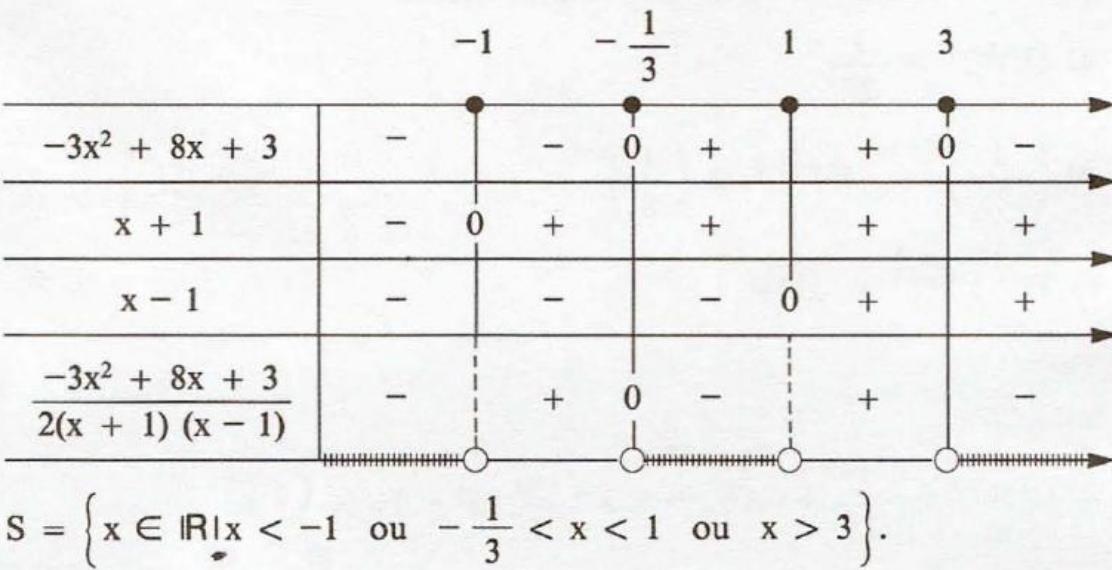
a) $(3^x)^{2x-7} > \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^{2x^2-7x} > 3^{-3} \Leftrightarrow 2x^2 - 7x > -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ ou $x > 3$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\right\}$.

b) $\left(\frac{1}{2^x}\right)^{3x+1} \cdot 4^{1+2x-x^2} \geqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} \Leftrightarrow \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{3x+1} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{1+2x-x^2} \geqslant$

$\geqslant \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3x^2+x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2-4x+2x^2} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2-3x-2} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-3} \Leftrightarrow 5x^2 - 3x - 2 \leqslant 3x - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 6x + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 1$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 1\right\}$.

c) $7^{\frac{x+1}{x-1}} : 7^{\frac{x-1}{x+1}} < \sqrt{343} \Leftrightarrow 7^{\frac{x+1}{x-1}} : 7^{\frac{x-1}{x+1}} < 7^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7^{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}} < 7^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} - \frac{3}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 8x + 3}{2(x+1)(x-1)} < 0$

		-1		$-\frac{1}{3}$		1		3	
$-3x^2 + 8x + 3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$x + 1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x - 1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{-3x^2 + 8x + 3}{2(x + 1)(x - 1)}$	$-$		$+$	0	$-$		$+$		$-$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } -\frac{1}{3} < x < 1 \text{ ou } x > 3\right\}.$$

121. Resolva as inequações exponenciais:

a) $(2^{x+1})^{2x-3} < 128$

b) $(27^{x-2})^{x+1} \geqslant (9^{x+1})^{x-3}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x+1} \leqslant \left(\frac{8}{27}\right)^{x-3}$

d) $25^{3-4x} : 125^{2-x} > 5^{3x+1}$

e) $\dfrac{0{,}04^{3x+2} \cdot 25^{1-4x}}{0{,}008^{3-x} \cdot 125^{4-3x}} > 1$

f) $2^{\frac{2x-3}{x-1}} : 32^{\frac{1}{x+1}} > 4$

g) $(0{,}1)^{\frac{1}{x+1}} \cdot (0{,}01)^{\frac{1}{x+3}} < (0{,}001)^{\frac{1}{x+2}}$

h) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} : \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x+2}} \leqslant \left[\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{x+3}}\right]^{\frac{1}{x}}$

122. Resolva a inequação:

$$2^x - 2^{x+1} - 2^{x+2} - 2^{x+3} + 2^{x+4} < \frac{3}{4}$$

Solução

$$2^x - 2^{x+1} - 2^{x+2} - 2^{x+3} + 2^{x+4} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2^x(1 - 2 - 2^2 - 2^3 + 2^4) < \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x \cdot 3 < \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2^x < 2^{-2} \Leftrightarrow x < -2$$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$.

123. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $2^{x-1} + 2^{x} + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} > 240$
b) $3^{x+5} - 3^{x+4} + 3^{x+3} - 3^{x+2} < 540$
c) $4^{x+1} - 2^{2x+1} + 4^{x} - 2^{2x-1} - 4^{x-1} \geqslant 144$
d) $3^{2x+1} - 9^{x} - 3^{2x-1} - 9^{x-1} \leqslant 42$
e) $3 \cdot 2^{2x+5} - 9 \cdot 2^{2x+3} - 5 \cdot 4^{x+1} + 7 \cdot 2^{2x+1} - 3 \cdot 4^{x} < 60$
f) $3^{(x^2)} + 5 \cdot 3^{(x^2+1)} + 2 \cdot 3^{(x^2+2)} - 4 \cdot 3^{(x^2+3)} + 3^{(x^2+4)} < 63$

124. Resolva as seguintes inequações:

a) $3^{2x+2} - 3^{x+3} > 3^{x} - 3$
b) $2^{x} - 1 > 2^{1-x}$
c) $4^{x+\frac{1}{2}} + 5 \cdot 2^{x} + 2 > 0$

Solução

a) $3^{2x+2} - 3^{x+3} > 3^{x} - 3 \iff 3^{2x} \cdot 3^{2} - 3^{x} \cdot 3^{3} - 3^{x} + 3 > 0 \iff$
$\iff 9\,(3^{x})^{2} - 28 \cdot 3^{x} + 3 > 0$
Fazendo $3^{x} = y$, temos:
$9y^{2} - 28y + 3 > 0 \iff y < \frac{1}{9}$ ou $y > 3$; mas $y = 3^{x}$, logo:

$3^{x} < \frac{1}{9}$ ou $3^{x} > 3 \iff 3^{x} < 3^{-2}$ ou $3^{x} > 3 \iff x < -2$ ou $x > 1$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 1\}$.

b) $2^{x} - 1 > 2^{1-x} \iff 2^{x} - 1 > \frac{2}{2^{x}} \iff 2^{x}(2^{x} - 1) > 2 \iff$

$\iff (2^{x})^{2} - 2^{x} - 2 > 0$
Fazendo $2^{x} = y$, temos:
$y^{2} - y - 2 > 0 \iff y < -1$ ou $y > 2$.
Mas $2^{x} = y$, logo: $2^{x} < -1$ ou $2^{x} > 2$.
Lembrando que $2^{x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, temos:
$2^{x} > 2 \iff x > 1$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

c) $4^{x+\frac{1}{2}} + 5 \cdot 2^{x} + 2 > 0 \iff 4^{x} \cdot 4^{\frac{1}{2}} + 5 \cdot 2^{x} + 2 > 0 \iff$
$\iff 2 \cdot (2^{x})^{2} + 5 \cdot 2^{x} + 2 > 0$
Fazendo $2^{x} = y$, temos:
$2y^{2} + 5y + 2 > 0 \iff y < -2$ ou $y > -\frac{1}{2}$; mas $y = 2^{x}$, logo:

$2^{x} < -2$ ou $2^{x} > -\frac{1}{2}$.

Lembrando que $2^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$2^x > -\frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$S = \mathbb{R}$.

125. Resolva as seguintes inequações:

a) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

b) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 > 0$

c) $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 \leqslant 0$

d) $2^{2x} - 2^{x+1} - 8 \leqslant 0$

e) $3^{2x} - 3^{x+1} > 3^x - 3$

f) $2^x (2^x + 1) < 2$

g) $25^x + 6 \cdot 5^x + 5 > 0$

h) $3^x (3^x + 6) < 3 (2 \cdot 3^{x-1} - 3)$

i) $2^{x+3} + 2^{-x} < 6$

j) $3 (3^x - 1) \geqslant 1 - 3^{-x}$

k) $4^{x+\frac{3}{2}} - 2^{x+2} \geqslant 2^{x+1} - 1$

l) $e^{2x} - e^{x+1} - e^x + e < 0$

126. Determine o conjunto solução da inequação $2^{2x+2} - 0,75 \cdot 2^{x+2} < 1$.

127. Resolva a inequação $2^{x+5} + 3^x < 3^{x+2} + 2^{x+2} + 2^x$.

128. Determine o conjunto de todos os números reais x para os quais $\frac{e^x + 1}{1 - x^2} < 0$.

129. Resolva a inequação $x^{2x^2-9x+4} < 1$ em $\mathbb{R}_+$.

Solução

1º) Verificamos se 0 ou 1 são soluções:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \Longrightarrow 0^4 < 1 \quad (V) \\ x = 1 \Longrightarrow 1^{-3} < 1 \quad (F) \end{array}\right\} \Longrightarrow S_1 = \{0\}$$

2º) Supomos $0 < x < 1$ e resolvemos:

$$x^{2x^2-9x+4} < x^0 \Longrightarrow 2x^2 - 9x + 4 > 0 \Longrightarrow x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 4$$

Lembrando que $0 < x < 1$, vem $S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$.

3º) Supomos $x > 1$ e resolvemos:

$$2^{2x^2-9x+4} < x^0 \Longrightarrow 2x^2 - 9x + 4 < 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} < x < 4$$

Lembrando que $x > 1$, vem $S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$.

A solução é $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \text{ ou } 1 < x < 4\right\}$.

130. Resolva em $\mathbb{R}_+$ as inequações:

a) $x^{5x-2} > 1$ c) $x^{2x^2+x-1} < 1$ e) $x^{3x^2-7x+2} \leqslant 1$
b) $x^{4x-3} < 1$ d) $x^{2x^2-5x-3} > 1$ f) $x^{4x^2-11x+6} \geqslant 1$

131. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $|x|^{3x^2-4x-4} > 1$.

132. Resolva em $\mathbb{R}_+$ as inequações:

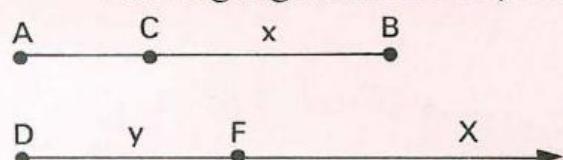
a) $x^{2x+4} < x$ c) $x^{4x^2-17x+5} < x$ e) $x^{x^2-5x+7} \leqslant x$
b) $x^{4x-1} \geqslant x$ d) $x^{5x^2-11x+3} > x$

133. Resolva em $\mathbb{R}_+$ as inequações:

a) $x^{(x^2)} > x^{2x}$ b) $x^2 < x^{x^2-7x+8}$ c) $x^{x^2-x-2} \geqslant x^4$

LEITURA

Os Logaritmos segundo Napier

Hygino H. Domingues

Certamente não era nada confortável uma viagem de Londres a Edimburgo no distante ano de 1615. Em veículos puxados a cavalos, por estradas esburacadas e poeirentas, o percurso parecia interminável. Mas para o eminente professor Henry Briggs (1556-1630), que ocupava no Gresham College de Londres a primeira cátedra de matemática criada na Inglaterra, valia a pena o sacrifício. Afinal, ia conhecer John Napier (1550-1617), que no ano anterior tornara pública uma invenção sua que sacudira a matemática da época: os logaritmos.

O nobre escocês John Napier, Barão de Murchiston, ao contrário de Briggs, não era um matemático profissional. Além de administrar suas grandes propriedades, dedicava-se a escrever sobre vários assuntos. Às vezes sem conseguir se livrar dos preconceitos da época, como num trabalho de 1593 em que procurava mostrar que o papa era o anticristo e que o Criador pretendia dar fim ao mundo entre 1688 e 1700. Às vezes como um visionário iluminado, como quando previu os submarinos e os tanques de guerra, por exemplo. Às vezes com a ponderação de um autêntico cientista, como no caso dos logaritmos, em cuja criação trabalhou cerca de 20 anos.

O termo *logaritmo* foi criado por Napier: de *logos* e *arithmos*, que significam, respectivamente, "razão" e "número". E a obra em que, no ano de 1614, apresentou essa sua descoberta recebeu o título de *Mirifice logarithmorum canonis descriptio* (ou seja, *Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*). Nela Napier explica a natureza dos logaritmos, segundo sua concepção, e fornece uma tábua de loga-

►

ritmos dos senos de 0° a 90°, de minuto em minuto. A razão de aplicar sua idéia à trigonometria se deveu ao fato de que o objetivo principal dessa tábua era facilitar os longos e penosos cálculos que navegadores e astrônomos enfrentavam diuturnamente.

Em linguagem moderna, Napier concebeu os seus logaritmos da seguinte maneira: Imaginemos os pontos C e F percorrendo respectivamente o segmento AB e a semi-reta DX, partindo ao mesmo tempo de A e D, com a mesma velocidade inicial; admitamos ainda que, numericamente, a velocidade de C seja dada sempre pela medida de CB e que a velocidade de F seja constante; nessas condições Napier definiu como logaritmo de $x = \overline{CB}$ o número $y = \overline{DF}$. Assim, explicitamente, nesse conceito não intervém a idéia de base. Mas pode-se provar que $y = 10^7 \log_{1/e} (x/10^7)$. A potência 10^7 surge aí porque Napier considerava $\overline{AB} = 10^7$. Aliás, à época de Napier o seno não era definido como hoje, por meio de uma razão; era a medida da semicorda do ângulo central, tomando como unidade um submúltiplo do raio da circunferência considerada. E, para evitar frações, um submúltiplo muito pequeno — no caso $1/10^7$ do raio.

John Napier (1550-1617).

Napier também estava ansioso por conhecer Briggs, a ponto de se decepcionar com o atraso de sua chegada, achando que não viria. Consta que ao se verem ficaram vários minutos sem conseguir articular nenhuma palavra. Durante o mês que Briggs passou em Edimburgo, certamente o assunto dominante de suas conversas com Napier foram os logaritmos. E acabaram concordando que uma tábua de logaritmos de base *10* seria mais útil. Mas Napier não viveria para levar a termo esse trabalho — Briggs e outros o fariam.

Considerando as prioridades da época, Briggs e Napier acertaram nessa opção. Mas, com o advento das calculadoras manuais e dos computadores, as tábuas de logaritmos perderam sua utilidade. Hoje, o que importa especialmente são certas propriedades funcionais da *função logaritmo* e de sua inversa, a *função exponencial*. E nesse sentido deve-se privilegiar, isto sim, a base $e = 2,7182\ldots$

CAPÍTULO III

Logaritmos

I. Conceito de logaritmo

38. Lembremos que no estudo de equações e inequações exponenciais, feito anteriormente, só tratamos dos casos em que podíamos reduzir as potências à mesma base.

Se queremos resolver a equação $2^x = 3$, sabemos que x assume um valor entre 1 e 2, pois $2^1 < 2^x = 3 < 2^2$, mas com os conhecimentos adquiridos até aqui não sabemos qual é esse valor nem o processo para determiná-lo.

A fim de que possamos resolver este e outros problemas, vamos iniciar agora o estudo de logaritmos.

39. *Definição*

Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se *logaritmo* de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b.

Em símbolos: se $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então:

$$\boxed{\log_a b = x \iff a^x = b}$$

Em $\log_a b = x$, dizemos:
a é a base do logaritmo, b é o logaritmando, x é o logaritmo.

40. *Exemplos*

1º) $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$

2º) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, pois $3^{-2} = \frac{1}{9}$

3º) $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$

4º) $\log_7 1 = 0$, pois $7^0 = 1$

5º) $\log_4 8 = \frac{3}{2}$, pois $4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$

6º) $\log_{0,2} 25 = -2$, pois $(0,2)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 = 25$

Com as restrições impostas ($a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$), dados a e b existe um único $x = \log_a b$.

A operação, pela qual se determina o logaritmo de b ($b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$) numa dada base a ($a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$), é chamada *logaritmação* e o resultado dessa operação é o *logaritmo*.

II. Antilogaritmo

41. *Definição*

Sejam a e b números reais positivos com $a \neq 1$; se o logaritmo de b na base a é x, então b é o antilogaritmo de x na base a.

Em símbolos, se $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = \text{antilog}_a x$$

Exemplos

1º) $\text{antilog}_3 2 = 9$, pois $\log_3 9 = 2$

2º) $\text{antilog}_{\frac{1}{2}} 3 = \frac{1}{8}$, pois $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$

3º) $\text{antilog}_2(-2) = \frac{1}{4}$, pois $\log_2 \frac{1}{4} = -2$

EXERCÍCIOS

134. Calcule pela definição os seguintes logaritmos:

a) $\log_2 \frac{1}{8}$ b) $\log_8 4$ c) $\log_{0,25} 32$

Solução

a) $\log_2 \frac{1}{8} = x \Rightarrow 2^x = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^x = 2^{-3} \Rightarrow x = -3$

b) $\log_8 4 = x \Rightarrow 8^x = 4 \Rightarrow 2^{3x} = 2^2 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

c) $\log_{0,25} 32 \Rightarrow (0,25)^x = 32 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 32 \Rightarrow 2^{-2x} = 2^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x = 5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

135. Calcule pela definição os seguintes logaritmos:

a) $\log_4 16$ e) $\log_7 \frac{1}{7}$ i) $\log_9 \frac{1}{27}$

b) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_{27} 81$ j) $\log_{0,25} 8$

c) $\log_{81} 3$ g) $\log_{125} 25$ k) $\log_{25} 0,008$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ h) $\log_{\frac{1}{4}} 32$ l) $\log_{0,01} 0,001$

136. As indicações R_1 e R_2, na escala Richter, de dois terremotos estão relacionadas pela fórmula

$$R_1 - R_2 = \log_{10}\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

em que M_1 e M_2 medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Houve dois terremotos: um correspondente a $R_1 = 8$ e outro correspondente a $R_2 = 6$. Calcule a razão $\frac{M_1}{M_2}$.

137. Calcule pela definição os seguintes logaritmos:

a) $\log_2 \sqrt{2}$
b) $\log_{\sqrt[3]{7}} 49$
c) $\log_{100} \sqrt[3]{10}$
d) $\log_{\sqrt{8}} \sqrt{32}$
e) $\log_{\sqrt[3]{5}} \sqrt[4]{5}$
f) $\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9}$
g) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{27}$
h) $\log_{\sqrt[3]{4}} \dfrac{1}{\sqrt{8}}$
i) $\log_{\sqrt[4]{3}} \dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$

138. Determine o conjunto verdade da equação $log_{\frac{3}{5}} \sqrt[3]{\dfrac{25}{9}} = x$.

139. Calcule a soma S nos seguintes casos:

a) $S = \log_{100} 0{,}001 + \log_{1,5} \dfrac{4}{9} - \log_{1,25} 0{,}64$

b) $S = \log_8 \sqrt{2} + \log_{\sqrt{2}} 8 - \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8}$

c) $S = \log_{\sqrt[3]{9}} \sqrt{\dfrac{1}{27}} - \log_{\sqrt[3]{0,5}} \sqrt{8} + \log_{\sqrt[3]{100}} \sqrt[6]{0{,}1}$

140. Calcule o valor de S:

$$S = \log_4 (\log_3 9) + \log_2 (\log_{81} 3) + \log_{0,8} (\log_{16} 32)$$

141. Calcule:

a) $\text{antilog}_3\ 4$
b) $\text{antilog}_{16} \dfrac{1}{2}$
c) $\text{antilog}_3 -2$
d) $\text{antilog}_{\frac{1}{2}} -4$

142. Determine o valor de x, na equação $y = 2^{\log_3 (x+4)}$, para que y seja igual a 8.

III. Conseqüências da definição

42. Decorrem da definição de logaritmos as seguintes propriedades para $0 < a \neq 1, b > 0$.

1º) "O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a *0*."

$$\log_a 1 = 0$$

2º) "O logaritmo da base em qualquer base é igual a *1*."

$$\log_a a = 1$$

3º) "A potência de base a e expoente $log_a b$ é igual a b."

$$a^{\log_a b} = b$$

A justificação desta propriedade está no fato de que o logaritmo de b na base a é o expoente que se deve dar à base a para a potência obtida ficar igual a b.

4º) "Dois logaritmos em uma mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais."

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Demonstração

$$\log_a b = \log_a c \xLeftrightarrow[\text{de logaritmo)}]{\text{(definição}} a^{\log_a c} = b \xLeftrightarrow[\text{conseqüência)}]{\text{(terceira}} c = b$$

EXERCÍCIOS

143. Calcule o valor de:

a) $8^{\log_2 5}$

b) $3^{1 + \log_3 4}$

Solução

a) $8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125$

b) $3^{1 + \log_3 4} = 3^1 \cdot 3^{\log_3 4} = 3 \cdot 4 = 12$

144. Calcule o valor de:

a) $3^{\log_3 2}$

b) $4^{\log_2 3}$

c) $5^{\log_{25} 2}$

d) $8^{\log_4 5}$

e) $2^{1 + \log_2 5}$

f) $3^{2 - \log_3 6}$

g) $8^{1 + \log_2 3}$

h) $9^{2 - \log_3 \sqrt{2}}$

145. Calcule:

a) $\text{antilog}_2 (\log_2 3)$

b) $\text{antilog}_3 (\log_3 5)$

146. Se $A = 5^{log_{25} 2}$, determine o valor de A^3.

147. Determine o valor de A tal que $4^{log_2 A} + 2A - 2 = 0$.

IV. Sistemas de logaritmos

43. Chamamos de *sistema de logaritmos de base a* ao conjunto de todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base a ($0 < a \neq 1$). Por exemplo, o conjunto formado por todos os logaritmos de base 2 dos números reais e positivos é o sistema de logaritmos na base 2.

Entre a infinidade de valores que pode assumir a base e, portanto, entre a infinidade de sistemas de logaritmos, existem dois sistemas de logaritmos particularmente importantes, que são:

a) *sistema de logaritmos decimais* é o sistema de base 10, também chamado sistema de logaritmos vulgares ou de Briggs (Henry Briggs, matemático inglês (1556-1630), quem primeiro destacou a vantagem dos logaritmos de base *10*, tendo publicado a primeira tábua (tabela) dos logaritmos de *1* a *1 000* em *1617*).

Indicaremos o logaritmo decimal pela notação $log_{10} x$ ou simplesmente $log\ x$.

b) *sistema de logaritmos neperianos* é o sistema de base e ($e = 2,71828...$ número irracional), também chamado de sistema de logaritmos naturais. O nome *neperiano* vem de John Napier, matemático escocês (1550-1617), autor do primeiro trabalho publicado sobre a teoria dos logaritmos. O nome *natural* se deve ao fato de que no estudo dos fenômenos naturais geralmente aparece uma lei exponencial de base e.

Indicaremos o logaritmo neperiano pelas notações $log_e x$ ou $\ell n\ x$. Em algumas publicações também encontramos as notações $Lg\ x$ ou $L\ x$.

EXERCÍCIOS

148. Seja x o número cujo logaritmo na base $\sqrt[3]{9}$ vale $0,75$. Determine o valor de $x^2 - 1$.

149. O logaritmo de um número na base 16 é $\frac{2}{3}$. Calcule o logaritmo desse número na base $\frac{1}{4}$.

150. Determine o número, cujo logaritmo na base a é 4 e na base $\frac{a}{3}$ é 8.

151. Calcule o logaritmo de 144 no sistema de base $2\sqrt{3}$.

152. Determine a base do sistema de logaritmos no qual o logaritmo de $\sqrt{2}$ vale -1.

V. Propriedades dos logaritmos

Vejamos agora as propriedades que tornam vantajoso o emprego de logaritmos nos cálculos.

44. 1ª) *Logaritmo do produto*

"Em qualquer base a $(0 < a \neq 1)$, o logaritmo do produto de dois fatores reais positivos é igual à soma dos logaritmos dos fatores."

Em símbolos:

> Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então
> $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Demonstração

Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b \cdot c) = z$, provemos que $z = x + y$.

De fato:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a (b \cdot c) \Rightarrow a^z = b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y \Rightarrow a^z = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

45. *Observações*

1ª) Esta propriedade pode ser estendida para o caso do logaritmo do produto de n ($n \geqslant 2$) fatores reais e positivos, isto é:

Se $0 < a \neq 1$ e $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, então:

$$\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + \ldots + \log_a b_n.$$

Demonstração

Faremos a demonstração por indução sobre n.

a) Para $n = 2$, é verdadeira, isto é:

$\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

b) Suponhamos que a propriedade seja válida para $p \geqslant 2$ fatores, isto é:

Hipótese $\{\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_p) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_p$

e mostremos que a propriedade é válida para $(p + 1)$ fatores, isto é:

Tese $\{\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_p \cdot b_{p+1}) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_p + \log_a b_{p+1}$

Temos:

1º membro da tese $= \log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_p \cdot b_{p+1}) =$
$= \log_a [(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_p) \cdot b_{p+1}] = \log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots b_p) + \log_a b_{p+1} =$
$= \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_p + \log_a b_{p+1} =$ *2º membro da tese.*

2ª) Devemos observar que, se $b > 0$ e $c > 0$, então $b \cdot c > 0$ e vale a identidade

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \text{ com } 0 < a \neq 1$$

mas, se soubermos apenas que $b \cdot c > 0$, então teremos:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a |b| + \log_a |c| \text{ com } 0 < a \neq 1.$$

Exemplos

1º) $\log_5 (3 \cdot 4) = \log_5 3 + \log_5 4$
2º) $\log_4 (2 \cdot 3 \cdot 5) = \log_4 2 + \log_4 3 + \log_4 5$
3º) $\log_6 3 \cdot (-4) \cdot (-5) = \log_6 3 + \log_6 |-4| + \log_6 |-5|$
4º) Se $x > 0$, então $\log_2 [x \cdot (x + 1)] = \log_2 x + \log_2 (x + 1)$
5º) $\log_3 [x \cdot (x - 2)] = \log_3 x + \log_3 (x - 2)$ se, e somente se, $x > 0$ e $x - 2 > 0$, isto é, $x > 2$.

46. 2ª) *Logaritmo do quociente*

"Em qualquer base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor."

Em símbolos:

> Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então
> $$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

Demonstração

Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z$, mostremos que $z = x - y$.

De fato:

$$\left.\begin{array}{lll} \log_a b = x & \Rightarrow & a^x = b \\ \log_a c = y & \Rightarrow & a^y = c \\ \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z & \Rightarrow & a^z = \frac{b}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^z = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$$

47. *Observações*

1ª) Fazendo $b = 1$, escrevemos:

$$\log_a \frac{1}{c} = \log_a 1 - \log_a c \Rightarrow \log_a \frac{1}{c} = -\log_a c$$

2ª) Se $b > 0$ e $c > 0$, então $\frac{b}{c} > 0$ e vale a identidade:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \text{ com } 0 < a \neq 1$$

mas, se soubermos apenas que $\frac{b}{c} > 0$, então teremos:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a |b| - \log_a |c| \text{ com } 0 < a \neq 1.$$

Exemplos

1º) $\log_5 \left(\frac{2}{3}\right) = \log_5 2 - \log_5 3$

2º) $\log \left(\frac{2 \cdot 3}{5}\right) = \log (2 \cdot 3) - \log 5 = \log 2 + \log 3 - \log 5$

3º) $\log \left(\frac{2}{3 \cdot 5}\right) = \log 2 - \log (3 \cdot 5) = \log 2 - [\log 3 + \log 5] =$

$= \log 2 - \log 3 - \log 5$

4º) Se $x > 0$, então $\log_2 \left(\frac{x}{x + 1}\right) = \log_2 x - \log_2 (x + 1)$

5º) $\log_3 \frac{x + 1}{x - 1} = \log_3 (x + 1) - \log_3 (x - 1)$ se, e somente se,

$x + 1 > 0$ e $x - 1 > 0$, isto é, $x > 1$.

48. Cologaritmo

Chama-se cologaritmo de um número b ($b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$), numa base a ($a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$), ao oposto do logaritmo de b na base a.

Em símbolos:

Se $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então
$\text{colog}_a\, b = -\log_a b$.

Considerando que $\log_a b = -\log_a \frac{1}{b}$, temos: se $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então:

$$\text{colog}_a\, b = \log_a \frac{1}{b}$$

Exemplos

1º) $\text{colog}_2\, 5 = -\log_2 5 = \log_2 \frac{1}{5}$

2º) $\text{colog}_2 \frac{1}{3} = -\log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3$

3º) $\log\left(\frac{2}{3}\right) = \log 2 - \log 3 = \log 2 + \text{colog } 3$

4º) Se $x > 1$, então $\log_3 x - \log_3 (x - 1) = \log_3 x + \text{colog}_3 (x - 1)$

49. 3ª) *Logaritmo da potência*

"Em qualquer base *a* ($0 < a \neq 1$), o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência."

Em símbolos:

> Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então
> $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$.

Demonstração

Fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a b^\alpha = y$, provemos que $y = \alpha \cdot x$.

De fato:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a b^\alpha = y \Rightarrow a^y = b^\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a^y = (a^x)^\alpha \Rightarrow a^y = a^{\alpha \cdot x} \Rightarrow y = \alpha \cdot x$$

50. *Observações*

1ª) Como corolário desta propriedade, decorre:

"Em qualquer base *a* ($0 < a \neq 1$), o logaritmo da raiz enésima de um número real positivo é igual ao produto do inverso do índice da raiz pelo logaritmo do radicando".

Em símbolos:

> Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, então
> $$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a b.$$

2ª) Se $b > 0$, então $b^\alpha > 0$ para todo α real e vale a identidade

$$\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$$

mas, se soubermos apenas que $b^\alpha > 0$, então temos:

$$\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a |b|.$$

Exemplos

1º) $\log_3 2^5 = 5 \cdot \log_3 2$

2º) $\log_5 \sqrt[3]{2} = \log_5 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_5 2$

3º) $\log_2 \frac{1}{3^4} = \log_2 3^{-4} = -4 \cdot \log_2 3$

4º) $\log (x - 1)^4 = 4 \cdot \log (x - 1)$ se, e somente se, $x-1>0$, isto é, $x>1$

5º) Se $x \neq 0$, então $\log x^2 = 2 \cdot \log |x|$.

51. As propriedades

1ª) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

2ª) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

3ª) $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$

válidas com as devidas restrições para a, b e c, nos permitem obter o logaritmo de um produto, de um quociente ou de uma potência, conhecendo somente os logaritmos dos termos do produto, dos termos do quociente ou da base de potência.

Notemos a *impossibilidade* de obter o logaritmo de uma soma ou de uma diferença por meio de regras análogas às dadas. Assim, para encontrarmos

$$\log_a (b + c) \quad e \quad \log_a (b - c)$$

devemos, respectivamente, calcular inicialmente $(b + c)$ e $(b - c)$.

52. As expressões que envolvem somente as operações de multiplicação, divisão e potenciação são chamadas *expressões logarítmicas*, isto é, expressões que podem ser calculadas utilizando logaritmos, com as restrições já conhecidas. Assim, por exemplo, a expressão

$$A = \frac{a^\alpha \cdot \sqrt[n]{b}}{c^\beta}$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, pode ser calculada aplicando logaritmos.

$$A = \frac{a^\alpha \cdot \sqrt[n]{b}}{c^\beta} \Rightarrow \log A = \log \frac{a^\alpha \cdot \sqrt[n]{b}}{c^\beta} \Rightarrow \log A = \log (a^\alpha \cdot b^{\frac{1}{n}}) - \log c^\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log A = \alpha \cdot \log a + \frac{1}{n} \log b - \beta \log c.$$

Dispondo de uma tabela que dê *log a*, *log b* e *log c* (veja nas páginas 134 e 135), calculamos *log A* e, então, pela mesma tabela, obtemos *P*.

EXERCÍCIOS

153. Desenvolva, aplicando as propriedades dos logaritmos (*a*, *b* e *c* são reais positivos):

a) $\log_2 \left(\frac{2ab}{c}\right)$ b) $\log_3 \left(\frac{a^3b^2}{c^4}\right)$ c) $\log \left(\frac{a^3}{b^2\sqrt{c}}\right)$

Solução

a) $\log_2 \left(\frac{2ab}{c}\right) = \log_2 (2ab) - \log_2 c = \log_2 2 + \log_2 a + \log_2 b -$
$- \log_2 c = 1 + \log_2 a + \log_2 b - \log_2 c$

b) $\log_3 \left(\frac{a^3b^2}{c^4}\right) = \log_3 (a^3b^2) - \log_3 c^4 = \log_3 a^3 + \log_3 b^2 - \log_3 c^4 =$
$= 3 \log_3 a + 2 \log_3 b - 4 \log_3 c$

c) $\log \left(\frac{a^3}{b^2 \sqrt{c}}\right) = \log a^3 - \log (b^2 \sqrt{c}) = \log a^3 - (\log b^2 + \log c^{\frac{1}{2}}) =$
$= 3 \log a - 2 \log b - \frac{1}{2} \log c$

154. Desenvolva, aplicando as propriedades dos logaritmos (*a*, *b* e *c* são reais positivos):

a) $\log_5 \left(\frac{5a}{bc}\right)$ d) $\log_3 \left(\frac{a \cdot b^3}{c \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)$ g) $\log_2 \sqrt{\frac{4a\sqrt{ab}}{b\sqrt[3]{a^2b}}}$

b) $\log_3 \left(\frac{ab^2}{c}\right)$ e) $\log \sqrt{\frac{ab^3}{c^2}}$ h) $\log \left(\sqrt[3]{\frac{a^4\sqrt{ab}}{b^2\sqrt[3]{bc}}}\right)^2$

c) $\log_2 \left(\frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}}\right)$ f) $\log \sqrt[3]{\frac{a}{b^2 \cdot \sqrt{c}}}$

155. Se $m = \dfrac{b \cdot c}{d^2}$, determine $log\ m$.

156. Seja $x = \dfrac{\sqrt{a}}{bc}$. Calcule $log\ x$.

157. Desenvolva, aplicando as propriedades dos logaritmos ($a > b > c > 0$):

a) $\log_2 \dfrac{2a}{a^2 - b^2}$

b) $\log_3 \left(\dfrac{a^2 \sqrt{bc}}{\sqrt[5]{(a + b)^3}} \right)$

c) $\log \left(c \cdot \sqrt[3]{\dfrac{a(a + b)^2}{\sqrt{b}}} \right)$

d) $\log \left(\dfrac{\sqrt[5]{a(a - b)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$

158. Qual é a expressão cujo desenvolvimento logarítmico é:

$1 + \log_2 a - \log_2 b - 2 \log_2 c$ (a, b, c são reais positivos)?

Solução

$1 + \log_2 a - \log_2 b - 2 \log_2 c = \log_2 2 + \log_2 a - (\log_2 b + 2 \log_2 c) =$

$= \log_2 (2a) - \log_2 (b \cdot c^2) = \log_2 \left(\dfrac{2a}{b \cdot c^2} \right)$

A expressão é $\dfrac{2a}{bc^2}$.

159. Qual é a expressão cujo desenvolvimento logarítmico é dado abaixo (a, b, c são reais positivos)?

a) $\log_2 a + \log_2 b - \log_2 c$

b) $2 \log a - \log b - 3 \log c$

c) $2 - \log_3 a + 3 \log_3 b - 2 \log_3 c$

d) $\dfrac{1}{2} \log a - 2 \log b - \dfrac{1}{3} \log c$

e) $\dfrac{1}{3} \log a - \dfrac{1}{2} \log c - \dfrac{3}{2} \log b$

f) $2 + \dfrac{1}{3} \log_2 a + \dfrac{1}{6} \log_2 b - \log_2 c$

g) $\dfrac{1}{4} (\log a - 3 \log b - 2 \log c)$

160. Qual é a expressão cujo desenvolvimento logarítmico é dado abaixo ($a > b > c > 0$)?

a) $1 + \log_2 (a + b) - \log_2 (a - b)$
b) $2 \log (a + b) - 3 \log a - \log (a - b)$
c) $\frac{1}{2} \log (a - b) + \log a - \log (a + b)$
d) $\frac{1}{2} \log (a^2 + b^2) - \left[\frac{1}{3} \log (a + b) - \log (a - b)\right]$
e) $\frac{3 \log (a - b) - 2 \log (a + b) + 4 \log b}{5}$

161. Se $\log x = \log b + 2 \log c - \frac{1}{3} \log a$, determine o valor de x.

162. Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, coloque em função de a e b os seguintes logaritmos decimais:

a) $\log 6$
b) $\log 4$
c) $\log 12$
d) $\log \sqrt{2}$
e) $\log 0{,}5$
f) $\log 20$
g) $\log 5$ $\left(\text{Sugestão: } 5 = \frac{10}{2}.\right)$
h) $\log 15$

163. O pH de uma solução é definido por $pH = \log_{10}\left(\frac{1}{H^+}\right)$, em que H^+ é a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução. Determine o pH de uma solução tal que $H^+ = 1{,}0 \times 10^{-8}$.

164. Sabendo que $\log 2 = 0{,}3010$, determine o valor da expressão $\log \frac{125}{\sqrt[5]{2}}$.

165. Se $\log_{10} 2 = 0{,}301$, calcule o valor da expressão
$\log_{10} 20 + \log_{10} 40 + \log_{10} 800$.

166. Determine a razão entre os logaritmos de 16 e 4 numa base qualquer.

167. Se $\log a + \log b = p$, calcule o valor de $\log \frac{1}{a} + \log \frac{1}{b}$.

168. Se $\log_2 (a - b) = m$ e $(a + b) = 8$, determine $\log_2 (a^2 - b^2)$.

169. A soma dos logaritmos de dois números na base 9 é $\frac{1}{2}$. Determine o produto desses números.

170. Se $\log_a x = n$ e $\log_a y = 6n$, calcule $\log_a \sqrt[3]{x^2 y}$.

171. Sabe-se que $log_m 2 = a$ e $log_m 3 = b$. Calcule o valor de $\log_m \frac{64}{2,7} - \log_m 60$.

172. Sendo $colog_2 \frac{1}{32} = x$ e $log_y 256 = 4$, determine o valor de $x + y$.

173. Sabendo que $log\ 2 = 0,3010300$, quanto vale $log\ 2^{20} = log\ 1048576$?

174. Sendo $log_{10} 2 \cong 0,3$, determine o menor número natural n que verifica a relação $2^n > 10^4$.

VI. Mudança de base

53. Há ocasiões em que logaritmos em bases diferentes precisam ser convertidos para uma única base conveniente.

Por exemplo:

1º) na aplicação das propriedades operatórias, os logaritmos devem estar todos numa mesma base.

2º) mais adiante (*) falaremos da tábua de logaritmos, uma tabela de valores que possibilita determinar o valor do logaritmo decimal de qualquer número real positivo. Se quisermos determinar o valor de um logaritmo não decimal, devemos antes transformá-lo em logaritmo decimal para depois procurar o valor na tabela.

Vejamos o processo que permite converter o logaritmo de um número positivo, em uma certa base, para outro em base conveniente.

54. *Propriedade*

Se a, b e c são números reais positivos e a e c diferentes de 1, então tem-se:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(*) Ver capítulo VII.

Demonstração

Consideremos $log_a b = x$, $log_c b = y$ e $log_c a = z$ e notemos que $z \neq 0$, pois $a \neq 1$.

Provemos que $x = \frac{y}{z}$.

De fato:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_c b = y \Rightarrow c^y = b \\ \log_c a = z \Rightarrow c^z = a \end{array}\right\} \Rightarrow (c^z)^x = a^x = b = c^y \Rightarrow zx = y \Rightarrow x = \frac{y}{z}.$$

55. Exemplos

1º) $log_3 5$ convertido para a base 2 fica:

$$\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}.$$

2º) $log_2 7$ convertido para a base 10 fica:

$$\log_2 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2}.$$

3º) $log_{100} 3$ convertido para a base 10 fica:

$$\log_{100} 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 100} = \frac{\log_{10} 3}{2} = \frac{1}{2} \log_{10} 3.$$

56. Observação

A propriedade da mudança de base pode também ser assim apresentada:

Se a, b e c são números reais e positivos e a e c diferentes de 1, então tem-se:

$$\boxed{\log_a b = \log_c b \cdot \log_a c}$$

Demonstração

A demonstração é bastante simples, basta que passemos o $log_c b$ para a base a:

$$\log_c b \cdot \log_a c = \frac{\log_a b}{\log_a c} \cdot \log_a c = \log_a b$$

57. Conseqüências

1º) Se a e b são reais positivos e diferentes de 1, então tem-se:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Demonstração

Convertendo $log_a\, b$ para a base b, temos: $log_a = \dfrac{log_b\, b}{log_b\, a} = \dfrac{1}{log_b\, a}$.

2º) Se a e b são reais positivos com a diferente de 1 e β é um real não nulo, então tem-se:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$$

Demonstração

Devemos considerar dois casos:

1º caso:

Se $b = 1$, temos:

$$\left.\begin{array}{l}\log_a 1 = 0 \\ \log_{a^\beta} 1 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \log_{a^\beta} 1 = \frac{1}{\beta} \log_a 1$$

2º caso:

Se $b \neq 1$, temos:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\log_b a^\beta} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b$$

Exemplos

1º) $\log_8 3 = \log_{2^3} 3 = \dfrac{1}{3} \log_2 3$

2º) $\log_{\frac{1}{5}} 6 = \log_{5^{-1}} 6 = -\log_5 6$

3º) $\log_{\frac{1}{9}} 5 = \log_{3^{-2}} 5 = -\dfrac{1}{2} \log_3 5$

EXERCÍCIOS

175. Sabendo que $log_{30} 3 = a$ e $log_{30} 5 = b$, calcule $log_{10} 2$.

Solução

Notando que $2 = \frac{30}{3 \cdot 5}$ e $10 = \frac{30}{3}$, temos:

$$\log_{10} 2 = \frac{\log_{30} 2}{\log_{30} 10} = \frac{\log_{30}\left(\frac{30}{3 \cdot 5}\right)}{\log_{30}\left(\frac{30}{3}\right)} = \frac{\log_{30} 30 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5}{\log_{30} 30 - \log_{30} 3} =$$

$$= \frac{1 - a - b}{1 - a}$$

176. Sabendo que $log_{20} 2 = a$ e $log_{20} 3 = b$, calcule $log_6 5$.

177. Se $log_{ab} a = 4$, calcule $log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

178. Se $log_{12} 27 = a$, calcule $log_6 16$.

179. Calcule o valor de $log_{0,04} 125$.

180. Se $log_2 m = k$, determine o valor de $log_8 m$.

181. Dados $log_{10} 2 = a$ e $log_{10} 3 = b$, calcule $log_9 20$.

182. Calcule o valor de $log_3 5 \cdot log_{25} 27$.

183. Se $m = log_b a$, $m \neq 0$, calcule $log_{\frac{1}{a}} b^2$.

184. Determine o valor de

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9$$

185. Se $ab = 1$, calcule $log_b \sqrt{a}$.

186. Sabendo que $log_{14} 7 = a$ e $log_{14} 5 = b$, calcule o valor de $log_{35} 28$.

Sugestão: $28 = \frac{14^2}{7}$.

187. Calcule $A = \log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt{2}$.

188. Simplifique $a^{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d}$.

189. Simplifique $a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$.

190. Demonstre que a relação entre os logaritmos de dois números positivos e diferentes de 1 independe da base considerada.

191. Se a, b e c são reais positivos com $a \neq 1$ e $ac \neq 1$, prove que:

$$\log_a b = (\log_{ac} b)(1 + \log_a c)$$

192. Se a, b e c são reais positivos, diferentes de 1, e $a = b \cdot c$, prove que:

$$\frac{1}{\log_a c} = 1 + \frac{1}{\log_b c}$$

193. Se a, b e c são reais positivos, diferentes de 1, e $a \cdot b \neq 1$, prove que:

$$\frac{\log_a c \cdot \log_b c}{(\log_{ab} c)^2} = \frac{(1 + \log_a b)^2}{\log_a b}$$

194. Se a, b, c e d são reais positivos, diferentes de 1, e $a \cdot b \neq 1$, prove que:

$$\log_a d \cdot \log_b d + \log_b d \cdot \log_c d + \log_c d \cdot \log_a d = \frac{\log_a d \cdot \log_b d \cdot \log_c d}{\log_{abc} d}$$

195. Se a e b são reais positivos, prove que: $a^{\log b} = b^{\log a}$.

196. Se a, b, c e d são reais positivos, a e c diferentes de 1, prove que:

$$\log_a b^{(\log_c d)} = \log_c d^{(\log_a b)}$$

197. Se $x = \log_c (ab)$, $y = \log_b (ac)$ e $z = \log_a (bc)$, prove que:

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{y + 1} + \frac{1}{z + 1} = 1$$

198. Se a, b, c e d são reais positivos, diferentes de 1 e dois a dois distintos, prove a equivalência: $\frac{\log_a d}{\log_c d} = \frac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} \Leftrightarrow b^2 = ac$.

199. Se a e b são raízes da equação $x^2 - px + q = 0$ ($p > 0$ e $0 < q \neq 1$), demonstre que:

$$\log_q a^a + \log_q b^b + \log_q a^b + \log_q b^a = p$$

200. Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo retângulo de hipotenusa de medida a e sabendo que $a - b \neq 1$ e $a + b \neq 1$, demonstre que:

$$\log_{a+b} c + \log_{a-b} c = 2 \log_{a+b} c \cdot \log_{a-b} c.$$

201. Se a, b e c são reais positivos, prove a igualdade:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\log c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\log a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log b} = 1.$$

202. Se $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$ e $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$, prove que: $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$.

203. Se a, b e c são reais positivos, diferentes de 1, e $a^b \cdot b^a = c^b \cdot b^c = a^c \cdot c^a$,

prove que: $\dfrac{a(b + c - a)}{\log a} = \dfrac{b(a + c - b)}{\log b} = \dfrac{c(a + b - c)}{\log c}$.

204. Se $0 < x \neq 1$, demonstre que:

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\log_x^2 2}$$

Sugestão: $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

LEITURA

Lagrange: a Grande Pirâmide da Matemática

Hygino H. Domingues

Em 1766, quando Euler deixou o lugar de diretor da seção de Matemática da Academia de Berlim, Frederico, o Grande, foi convencido por D'Alembert de que o substituto ideal seria Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). E Frederico, do alto de sua presunção, formulou um convite em que fazia constar que "o maior dos matemáticos deveria viver perto do maior dos reis". Esse "argumento" sem dúvida era muito fraco para convencer alguém tão modesto quanto Lagrange. Mas fatores de ordem científico-profissional devem ter pesado decisivamente e lá se foi Lagrange para a capital da Prússia, onde viveu por cerca de 20 anos, até a morte de Frederico. E durante esse período o monarca jamais teve dúvidas de que fizera a melhor escolha possível.

Lagrange nasceu em Turim, mas tinha ascendência francesa, além de italiana. Era o mais novo (e único sobrevivente) de uma prole de onze filhos. Seus pais, que eram ricos ao se casarem, perderam tudo e não deixaram bens ao filho — um fato que Lagrange serenamente assim comentou: "Se houvesse herdado uma fortuna, provavelmente não me teria dedicado à matemática".

Mas a matemática não foi a primeira predileção de Lagrange em seus estudos. Inicialmente inclinou-se para as línguas clássicas; depois, já na Universidade de Turim, seu interesse voltou-se para a física; por fim, influenciado por um texto de E. Halley (1656-1742), cuja finalidade era pôr em evidência as vantagens do cálculo newtoniano, abraçou a matemática, que tanto iria engrandecer. E já aos 18 anos de idade, mercê de seu talento e seu empenho, era indicado professor de Geometria da Escola Real de Artilharia de Turim. Por essa época começou a concorrer aos cobiçados prêmios bienais oferecidos pela Academia de Ciências de Paris. E levaria a palma em cinco, até 1788, com trabalhos de aplicação da matemática à astronomia.

Após a morte de Frederico, Lagrange fixou-se em Paris, a convite de Luís XVI. Pouco depois, um esgotamento nervoso roubou-lhe todo o interesse pela matemática. Curiosamente, o tumulto da Revolução Francesa o tirou desse estado. E nos anos seguintes, em meio a tantas crises e reviravoltas, conseguiu manter-se sempre ativo e produtivo. E o fez com tanta dignidade que, a despeito de jamais ter feito concessões, ganhou o respeito das sucessivas facções que ocuparam o poder.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Lagrange deixou contribuições de monta em campos diversos como a álgebra, a teoria dos números e a análise. Neste último tentou algo praticamente impossível para a época: aclarar o conceito de derivada. E como sua abordagem foi essencialmente algébrica, visando contornar as idéias de "limite", segundo Newton, e "diferencial", segundo Leibniz, na época ainda mal alicerçadas, não poderia mesmo ter sucesso. Mas, apesar dos lapsos que cometeu, deu um passo à frente com seu enfoque abstrato. De seu esforço ficou contudo a idéia de *função derivada* e a notação correspondente $f'(x)$, ainda em uso.

Dentre as obras de Lagrange, a que mais marcou época foi sua *Mecânica analítica* (1788), na qual começou a pensar ainda em Turim e que, no dizer de Hamilton, é "uma espécie de poema científico". Em seu prefácio Lagrange gaba-se de não usar um diagrama sequer no texto, salientando dessa forma o tratamento postulacional-analítico que deu ao assunto, considerando a mecânica mais uma geometria em quatro dimensões (a quarta dimensão é o tempo) do que um ramo das ciências naturais. A *Mecânica analítica* é um coroamento da obra de Newton, de quem certa vez Lagrange disse: "foi o mais feliz dos homens, pois não há senão um Universo e coube a ele a honra de descobrir suas leis matemáticas".

Napoleão, que o nomeou senador, conde e grão-oficial da Legião de Honra, melhor do que ninguém soube sintetizar seu perfil científico: "Lagrange é a grande pirâmide da matemática".

CAPÍTULO IV

Função Logarítmica

I. Definição

58. Dado um número real a ($0 < a \neq 1$), chamamos *função logarítmica de base a* a função f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x o número $\log_a x$.

Em símbolos:

$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \to \log_a x$$

Exemplos de funções logarítmicas em $\mathbb{R}_+^*$

a) $f(x) = \log_2 x$

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

c) $h(x) = \log x$

d) $p(x) = \ell n\ x$

II. Propriedades

1ª) Se $0 < a \neq 1$, então as funções f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$ são inversas uma da outra.

Demonstração

Para provar esta propriedade basta mostrarmos que $f \circ g = I_{\mathbb{R}}$ e $g \circ f = I_{\mathbb{R}_+^*}$.

De fato:

$(f \circ g)\ (x) = f(g(x)) = \log_a g(x) = \log_a a^x = x$ e

$(g \circ f)\ (x) = g(f(x)) = a^{f(x)} = a^{\log_a x} = x$

2ª) A função logarítmica $f(x) = log_a x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ $(0 < a < 1)$.

Demonstração

Provemos inicialmente a implicação

$a > 1 \Rightarrow (\forall x_2 \in \mathbb{R}_+^*, \forall x_1 \in \mathbb{R}_+^*, x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1)$

De fato:

Quaisquer que sejam x_1 e x_2 positivos e $x_2 > x_1$ tem-se pela terceira conseqüência da definição de logaritmos

$$a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$$

e agora pelo teorema 2 (página 27) concluímos que:

$$\log_a x_2 > \log_a x_1$$

Provemos agora a implicação

$(\forall x_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall x_2 \in \mathbb{R}_+^*, \log_a x_2 > \log_a x_1 \Rightarrow x_2 > x_1) \Rightarrow a > 1.$

Considerando

$\log_a x_2 = y_2 \Rightarrow x_2 = a^{y_2}$
$\log_a x_1 = y_1 \Rightarrow x_1 = a^{y_1}$ temos:
$y_2 > y_1 \Rightarrow a^{y_2} > a^{y_1}$.

Pelo fato de a função exponencial ser crescente para base maior que *1* concluímos que $a > 1$.

A demonstração de que a função logarítmica é decrescente se, e somente se, a base é positiva e menor que *1* ficará como exercício.

Observações

59. 1ª) Quando a base é maior que *1*, a relação de desigualdade existente entre os logaritmos de dois números positivos tem o mesmo sentido que a relação entre esses números.

Exemplos

1º) $4 > 2 \Rightarrow \log_2 4 > \log_2 2$
2º) $15 > 4 \Rightarrow \log_3 15 > \log_3 4$
3º) $\sqrt{5} < 7 \Rightarrow \log \sqrt{5} < \log 7$
4º) $0{,}42 < 6{,}3 \Rightarrow \log_7 0{,}42 < \log_7 6{,}3$
5º) $4 > 0{,}3 \Rightarrow \ell n\, 4 > \ell n\, 0{,}3$

2ª) Quando a base é positiva e menor que *1*, a relação de desigualdade existente entre os logaritmos de dois números positivos é de sentido contrário à que existe entre esses números.

Exemplos

1º) $8 > 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{2}} 2$

2º) $12 > 5 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} 12 < \log_{\frac{1}{3}} 5$

3º) $\sqrt{3} < 7 \Rightarrow \log_{0,1} \sqrt{3} > \log_{0,1} 7$

4º) $0,3 < 2,4 \Rightarrow \log_{0,2} 0,3 > \log_{0,2} 2,4$

3ª) Se a base é maior que *1*, então os números positivos menores que *1* têm logaritmos negativos e os números maiores que *1* têm logaritmos positivos.

De fato, se $a > 1$:

$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0$

$x > 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0$

Exemplos

1º) $\log_2 0,25 < 0$

2º) $\log 0,02 < 0$

3º) $\log_2 32 > 0$

4º) $\log_3 \sqrt{5} > 0$

4ª) Se a base é positiva e menor que *1*, então os números positivos menores que *1* têm logaritmos positivos e os números maiores que *1* têm logaritmos negativos.

De fato, se $0 < a < 1$:

$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0$

$x > 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0$

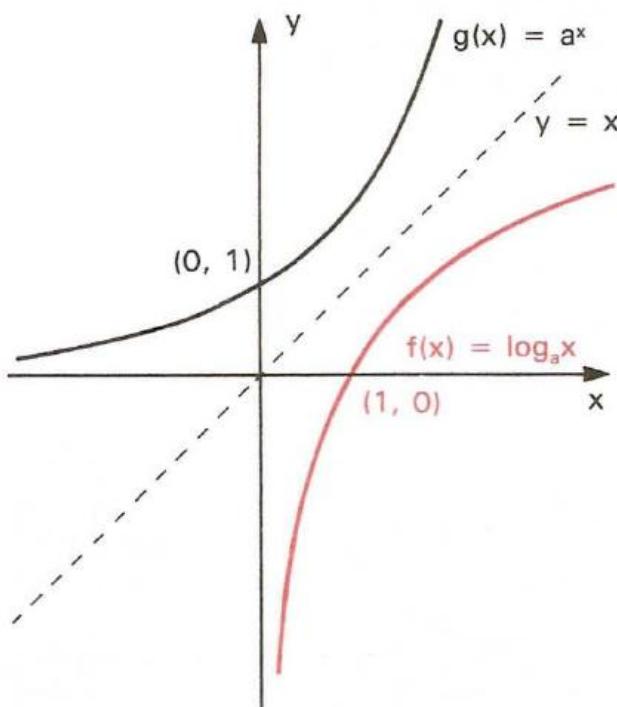
Exemplos

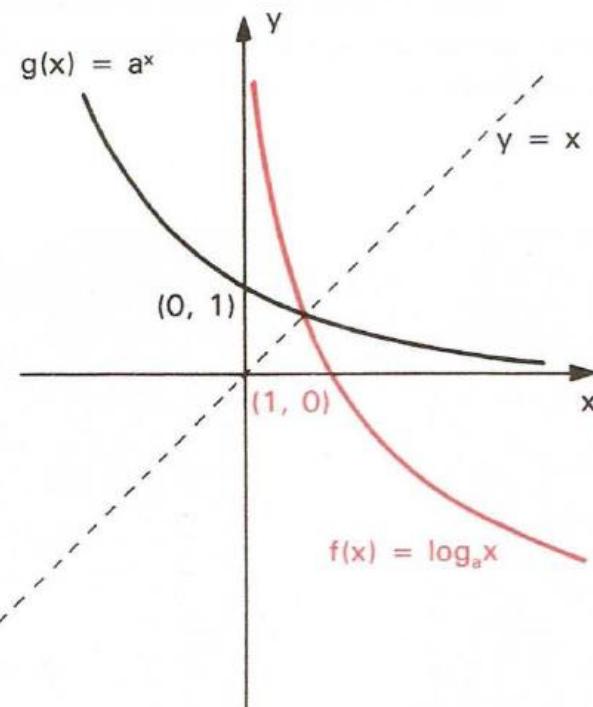
1º) $\log_{0,5} 0,25 > 0$

2º) $\log_{0,1} 0,03 > 0$

3º) $\log_{0,5} 4 < 0$

4º) $\log_{0,2} \sqrt{3} < 0$

III. Imagem

Se $0 < a \neq 1$, então a função f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = log_a\ x$ admite a função inversa de g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$. Logo, f é bijetora e, portanto, a imagem de f é:

$$\text{Im} = \mathbb{R}$$

IV. Gráfico

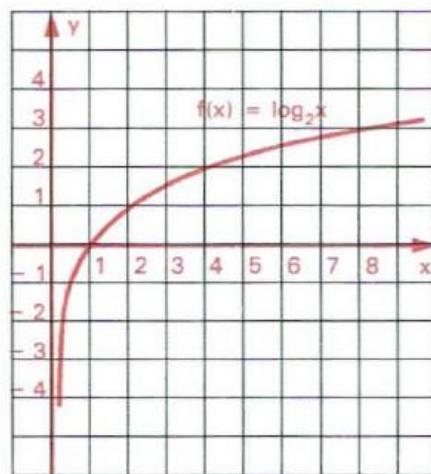
Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = log_a\ x$ $(0 < a \neq 1)$, podemos dizer:

1º) está todo à direita do eixo y $(x > 0)$;

2º) corta o eixo x no ponto de abscissa 1 ($log_a\ 1 = 0$ para todo $0 < a \neq 1$);

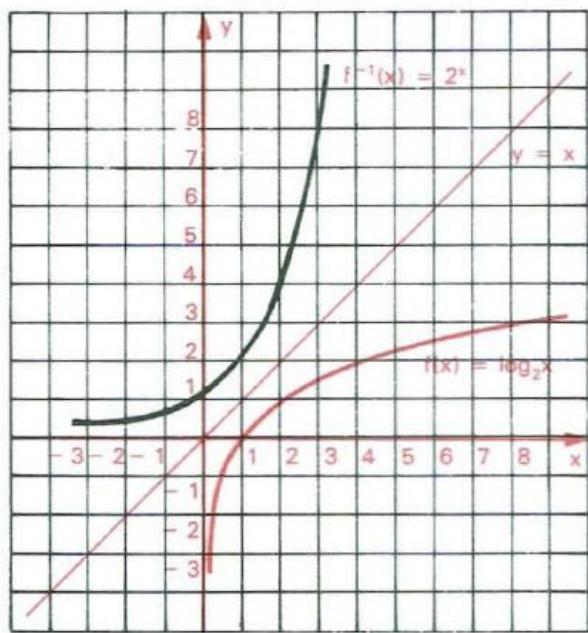
3º) se $a > 1$ é de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é de uma função decrescente;

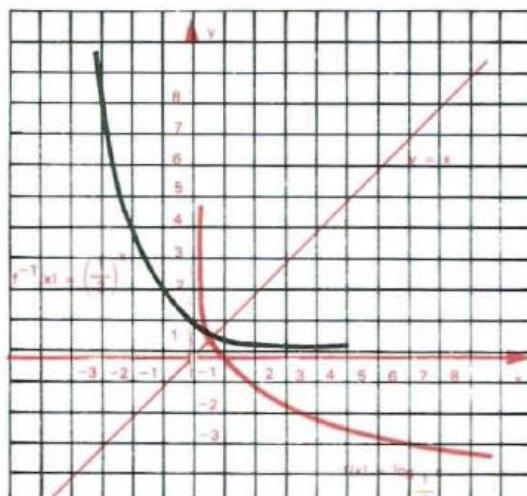
4º) é simétrico em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares) do gráfico da função $g(x) = a^x$;

5º) toma um dos aspectos da figura abaixo:

60. *Exemplos*

1º) Construir o gráfico cartesiano da função $f(x) = log_2\, x$ (x > 0). Construímos a tabela dando valores inicialmente a y e depois calculamos x.

x	$y = \log_2 x$
	-3
	-2
	-1
	0
	1
	2
	3

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

Uma alternativa para construirmos o gráfico de $f(x) = log_2\, x$ $(x > 0)$ seria construirmos inicialmente o gráfico da função inversa $g(x) = f^{-1}(x) = 2^x$ e lembrar que, se $(b, a) \in f^{-1} = g$, então $(a, b) \in f$.

f^{-1}

x	$y = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

f

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

2º) Construir o gráfico cartesiano da função $f(x) = log_{\frac{1}{2}} x (x > 0)$.

f^{-1}

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

f

x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
8	−3
4	−2
2	−1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3

EXERCÍCIOS

205. Assinale em cada proposição *V* (verdadeira) ou *F* (falsa):

a) $\log_2 3 > \log_2 0{,}2$

b) $\log_3 5 < \log_3 7$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 6 > \log_{\frac{1}{2}} 3$

d) $\log_{0,1} 0{,}13 > \log_{0,1} 0{,}32$

e) $\log_4 0{,}10 > \log_4 0{,}9$

f) $\log_{0,2} 2{,}3 < \log_{0,2} 3{,}5$

g) $\log \frac{1}{2} < \log \frac{1}{3}$

h) $\log_{0,5} \frac{2}{3} > \log_{0,5} \frac{3}{4}$

i) $\log_5 \sqrt{2} > \log_5 \sqrt{3}$

j) $\log_{(\sqrt{2}-1)} (1 + \sqrt{2}) < \log_{(\sqrt{2}-1)} 6$

206. Sendo $y = e^x$ para x pertencente a $\mathbb{R}$, expresse sua função inversa.

207. Se $f(x) = log_e \dfrac{1}{x}$, calcule o valor de $f(e^3)$.

208. Seja f a função que a cada quadrado perfeito associa seu logaritmo na base 2. Se $f(x^2) = 2$, determine o valor de x.

209. Construa os gráficos das funções:

a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

c) $f(x) = \log x$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$

210. Construa os gráficos das funções:

a) $f(x) = \log_2 |x|$

b) $f(x) = |\log_2 x|$

c) $f(x) = |\log_2 |x||$

211. Represente graficamente a função f definida por $f(x) = \ell n\ |x|$.

212. Construa os gráficos das funções:

a) $f(x) = \log_2 (x - 1)$

b) $f(x) = \log_3 (2x - 1)$

c) $f(x) = \log_2 x^2$

d) $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$

213. Construa os gráficos das funções:

a) $f(x) = 2 + \log_2 x$

b) $f(x) = 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$

214. Represente graficamente a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ \sqrt{\log_a |x|} & \text{se } |x| \geqslant 1 \text{ e } a > 1 \end{cases}$$

215. Represente graficamente a função f: $\mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |\log_2 |x - 2||$.

216. Determine o número de pontos comuns aos gráficos das funções definidas por $y = e^x$ e $y = -log\ |x|$, $x \neq 0$.

217. Determine o domínio da função $f(x) = log_3 (x^2 - 4)$.

Solução

Para que o logaritmo seja real devemos ter logaritmando positivo e base positiva e diferente de 1.

Assim:

$\log_3 (x^2 - 4) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ou $x > 2$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2$ ou $x > 2\}$.

218. Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \log_2 (1 - 2x)$

b) $f(x) = \log_3 (4x - 3)^2$

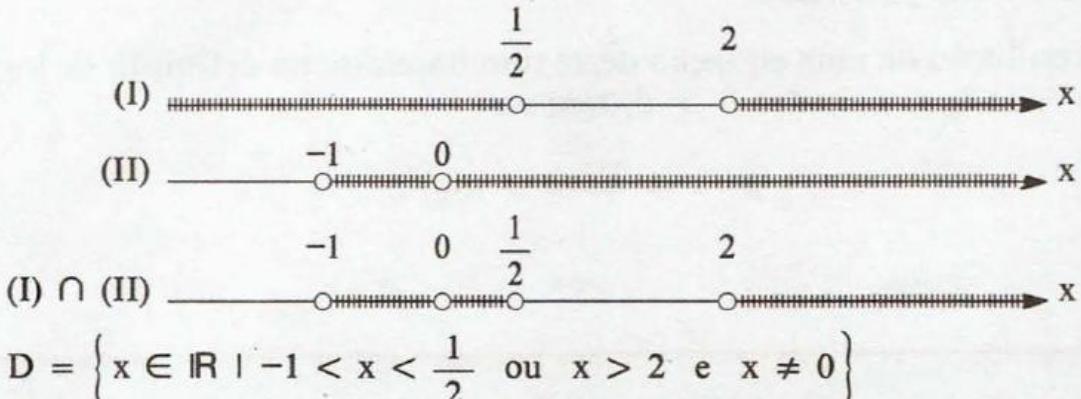
c) $f(x) = \log_5 \dfrac{x + 1}{1 - x}$

d) $f(x) = \log (x^2 + x - 12)$

219. Determine o conjunto do domínio da função definida por $\log (x^2 - 6x + 9)$.

220. Determine os valores de K, para que o domínio da função f dada por $f(x) = \log (x^2 + Kx + K)$ seja o conjunto dos números reais.

221. Determine o domínio da função $f(x) = \log_{(x+1)} (2x^2 - 5x + 2)$.

Solução

$$\log_{(x+1)} (2x^2 - 5x + 2) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 > 0 & \text{(I) e} \\ 0 < x + 1 \neq 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo separadamente as inequações (I) e (II), temos:

(I) $2x^2 - 5x + 2 > 0 \Rightarrow x < \dfrac{1}{2}$ ou $x > 2$

(II) $0 < x + 1 \neq 1 \Rightarrow -1 < x \neq 0$

Fazendo a interseção desses conjuntos:

(I): $\frac{1}{2}$, 2 — x

(II): -1, 0 — x

(I) ∩ (II): -1, 0, $\frac{1}{2}$, 2 — x

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \text{ e } x \neq 0\right\}$$

222. Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \log_{(3-x)} (x + 2)$

b) $f(x) = \log_x (x^2 + x - 2)$

c) $f(x) = \log_{(2x-3)} (3 + 2x - x^2)$

CAPÍTULO V

Equações Exponenciais e Logarítmicas

I. Equações exponenciais

61. Como havíamos dito quando do primeiro estudo de equações exponenciais, voltamos novamente a esse assunto.

Abordaremos agora as equações exponenciais que não podem ser reduzidas a uma igualdade de potências de mesma base pela simples aplicação das propriedades das potências.

A resolução de uma equação deste tipo baseia-se na definição de logaritmo, isto é, se $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, tem-se:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

EXERCÍCIOS

223. Resolva as equações:

a) $2^x = 3$

b) $5^{2x-3} = 3$

Solução

a) $2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$

$S = \{\log_2 3\}$

b) $5^{2x-3} = 3 \Rightarrow \dfrac{5^{2x}}{5^3} = 3 \Rightarrow 25^x = 375 \Rightarrow x = \log_{25} 375$

$S = \{\log_{25} 375\}$

224. Resolva as equações:

a) $5^x = 4$

b) $3^x = \dfrac{1}{2}$

c) $7^{\sqrt{x}} = 2$

d) $3^{(x^2)} = 5$

e) $5^{4x-3} = 0{,}5$

f) $3^{2x+1} = 2$

g) $7^{2-3x} = 5$

225. Resolva a equação $a^x = b$, com $a > 1$ e $b > 1$.

226. O crescimento de uma certa cultura de bactérias obedece à função $X(t) = Ce^{kt}$, em que $X(t)$ é o número de bactérias no tempo $t \geqslant 0$; C, k são constantes positivas (e é a base do logaritmo neperiano). Verificando que o número inicial de bactérias $X(0)$ duplica em 4 horas, quantas se pode esperar no fim de 6 horas?

Solução

$X(t) = Ce^{kt} \xrightarrow{t\,=\,0} X(0) = C \cdot e^0 = C$

$X(4) = C \cdot e^{4k} = 2C$ (duplica em 4 horas)

$\therefore\ e^{4k} = 2 \Rightarrow K = \dfrac{\ell n\, 2}{4} = \ell n \sqrt[4]{2}$

Então, para $t = 6$, vem:

$X(6) = C \cdot e^{6\,\ell n \sqrt[4]{2}} = C \cdot e^{\ell n \sqrt{2^3}} = C \cdot 2\sqrt{2}$

Resposta: Ao final de 6 horas, o número de bactérias é $2\sqrt{2}$ vezes o valor inicial.

227. Uma substância radioativa está em processo de desintegração, de modo que no instante t a quantidade não desintegrada é $A(t) = A(0) \cdot e^{-3t}$, em que $A(0)$ indica a quantidade da substância no instante $t = 0$. Calcule o tempo necessário para que a metade da quantidade inicial se desintegre.

228. A lei de decomposição do radium no tempo $t \geqslant 0$ é dada por $M(t) = Ce^{-kt}$, em que $M(t)$ é a quantidade de radium no tempo t; C, K são constantes positivas (e é a base do logaritmo neperiano). Se a metade da quantidade primitiva $M(0)$ desaparece em $1\,600$ anos, qual a quantidade perdida em 100 anos?

229. Resolva a equação $2^{3x-2} = 3^{2x+1}$.

Solução

$$2^{3x-2} = 3^{2x+1} \Rightarrow \frac{2^{3x}}{2^2} = 3^{2x} \cdot 3 \Rightarrow \frac{(2^3)^x}{(3^2)^x} = 2^2 \cdot 3 \Rightarrow \frac{8^x}{9^x} = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{8}{9}\right)^x = 12 \Rightarrow x = \log_{\frac{8}{9}} 12$$

$$S = \{\log_{\frac{8}{9}} 12\}$$

230. Resolva as equações:

a) $2^x = 3^{x+2}$

b) $7^{2x-1} = 3^{3x+4}$

c) $5^{x-1} = 3^{4-2x}$

231. Resolva as equações:

a) $3^x = 2^x + 2^{x+1}$

b) $5^x + 5^{x+1} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

c) $2^{x+1} - 2^x = 3^{x+2} - 3^x$

232. Resolva a equação $2^{3x+2} \cdot 3^{2x-1} = 8$.

233. Resolva as equações:

a) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

b) $4^x - 6 \cdot 2^x + 5 = 0$

c) $9^x - 3^{x+1} - 4 = 0$

d) $3^{2x+1} - 3^{x+1} + 2 = 0$

e) $4^{x+1} - 2^{x+4} + 15 = 0$

f) $3^{x+1} + \dfrac{18}{3^x} = 29$

234. Resolva a equação $4^x + 6^x = 9^x$.

235. Resolva a equação $4^x = 2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x$.

236. Resolva a equação $a^{4x} + a^{2x} = 1$, supondo $0 < a \neq 1$.

237. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 40 \\ 64^{x+y} = 12 \end{cases}$$

II. Equações logarítmicas

Podemos classificar as equações logarítmicas em três tipos:

62. 1º tipo: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

É a equação que apresenta, ou é redutível a, uma igualdade entre dois logaritmos de mesma base a $(0 < a \neq 1)$.

A resolução de uma equação deste tipo baseia-se na quarta conseqüência da definição.

Não nos devemos esquecer das condições de existência do logaritmo, isto é, a base do logaritmo deverá ser positiva e diferente de 1 e o logaritmando deverá ser positivo. Assim sendo, os valores encontrados na resolução da equação só serão considerados soluções da equação logarítmica proposta se forem valores que satisfaçam as condições de existência do logaritmo.

Esquematicamente, temos:

> Se $0 < a \neq 1$, então
> $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) > 0.$

63. Exemplos

1º) Resolver a equação $\log_2 (3x - 5) = \log_2 7$.

Solução

$$\log_2 (3x - 5) = \log_2 7 \Rightarrow 3x - 5 = 7 > 0$$

Resolvendo

$$3x - 5 = 7 \Rightarrow x = 4$$

$x = 4$ é solução da equação proposta e não há necessidade de verificarmos, pois $7 > 0$ é satisfeita para todo x real.

$S = \{4\}$.

2º) Resolver a equação $\log_3 (2x - 3) = \log_3 (4x - 5)$.

Solução

$$\log_3 (2x - 3) = \log_3 (4x - 5) \Rightarrow 2x - 3 = 4x - 5 > 0.$$

Resolvendo

$$2x - 3 = 4x - 5 \Rightarrow x = 1$$

$x = 1$ não é solução da equação proposta, pois fazendo $x = 1$ em $4x - 5$ encontramos $4 \cdot 1 - 5 = -1 < 0$, logo a equação proposta não tem solução. Chegaríamos à mesma conclusão se, em vez de fazer $x = 1$ em $4x - 5$, o fizéssemos em $2x - 3$, já que $2x - 3 = 4x - 5$.

$S = \varnothing$.

3º) Resolver a equação $\log_5 (x^2 - 3x - 10) = \log_5 (2 - 2x)$.

Solução

$$\log_5 (x^2 - 3x - 10) = \log_5 (2 - 2x) \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 2 - 2x > 0.$$

Resolvendo

$$x^2 - 3x - 10 = 2 - 2x \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

$x = 4$ não é solução, pois, fazendo $x = 4$ em $2 - 2x$, encontramos $2 - 2 \cdot 4 = -6 < 0$.

$x = -3$ é solução, pois, fazendo $x = -3$ em $2 - 2x$, encontramos $2 - 2 \cdot (-3) = 8 > 0$.

$S = \{-3\}$.

64. 2º tipo: $\log_a f(x) = \alpha$.

É a equação logarítmica que apresenta, ou é redutível a, uma igualdade entre um logaritmo e um número real.

A resolução de uma equação deste tipo é simples; basta aplicarmos a definição de logaritmo.

Esquematicamente, temos:

> Se $0 < a \neq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então
> $\log_a f(x) = \alpha \Rightarrow f(x) = a^\alpha$.

Não precisamos nos preocupar com a condição de existência do logaritmo; sendo $0 < a \neq 1$, temos $a^\alpha > 0$ para todo α real e conseqüentemente $f(x) = a^\alpha > 0$.

65. *Exemplos*

1º) Resolver a equação $log_2 (3x + 1) = 4$.

Solução

$\log_2 (3x + 1) = 4 \Rightarrow 3x + 1 = 2^4 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$
$S = \{5\}$.

2º) Resolver a equação $log_3 (x^2 + 3x - 1) = 2$.

Solução

$\log_3 (x^2 + 3x - 1) = 2 \Rightarrow x^2 + 3x - 1 = 3^2 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 2$ ou $x = -5$.
$S = \{2, -5\}$.

3º) Resolver a equação $log_2 [1 + log_3 (1 - 2x)] = 2$.

Solução

$\log_2 [1 + \log_3 (1 - 2x)] = 2 \Rightarrow 1 + \log_3 (1 - 2x) = 2^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_3 (1 - 2x) = 3 \Rightarrow 1 - 2x = 3^3 \Rightarrow x = -13$.
$S = \{-13\}$.

66. *3º tipo: incógnita auxiliar*

São as equações que resolvemos fazendo inicialmente uma mudança de incógnita.

67. *Exemplos*

1º) Resolver a equação $log_2^2 x - log_2 x = 2$.

Solução

A equação proposta é equivalente à equação

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$$

Fazendo $log_2 x = y$, temos: $y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $y = 1$.

Mas $y = log_2\ x$, então:

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$$

$$\log_2 x = -1 \Rightarrow x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{4, \frac{1}{2}\right\}.$$

2º) Resolver a equação $\dfrac{2 + log_3\ x}{log_3\ x} + \dfrac{log_3\ x}{1 + log_3\ x} = 2.$

Solução

Fazendo $log_3\ x = y$, temos:

$$\frac{2 + y}{y} + \frac{y}{1 + y} = 2 \Rightarrow (2 + y)(1 + y) + y^2 = 2y(1 + y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y^2 + 3y + 2 = 2y^2 + 2y \Rightarrow y = -2.$$

Mas $y = log_3\ x$, então: $log_3\ x = -2 \Rightarrow x = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$.

$$S = \left\{\frac{1}{9}\right\}.$$

EXERCÍCIOS

238. Resolva as equações:

a) $\log_4 (3x + 2) = \log_4 (2x + 5)$
b) $\log_3 (5x - 6) = \log_3 (3x - 5)$
c) $\log_2 (5x^2 - 14x + 1) = \log_2 (4x^2 - 4x - 20)$
d) $\log_{\frac{1}{3}} (3x^2 - 4x - 17) = \log_{\frac{1}{3}} (2x^2 - 5x + 3)$
e) $\log_4 (4x^2 + 13x + 2) = \log_4 (2x + 5)$
f) $\log_{\frac{1}{2}} (5x^2 - 3x - 11) = \log_{\frac{1}{2}} (3x^2 - 2x - 8)$

239. Resolva as equações:

a) $\log_5 (4x - 3) = 1$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (3 + 5x) = 0$

c) $\log_{\sqrt{2}} (3x^2 + 7x + 3) = 0$

d) $\log_4 (2x^2 + 5x + 4) = 2$

e) $\log_{\frac{1}{3}} (2x^2 - 9x + 4) = -2$

f) $\log_3 (x - 1)^2 = 2$

g) $\log_4 (x^2 - 4x + 3) = \frac{1}{2}$

240. Aumentando um número x em *16* unidades, seu logaritmo na base *3* aumenta em 2 unidades. Determine x.

241. Determine o valor de x para que $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) \cdot \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{32} = \frac{5}{3}$.

242. Resolva as equações:

a) $\log_3 (\log_2 x) = 1$

b) $\log_{\frac{1}{2}} [\log_3 (\log_4 x)] = 0$

c) $\log_{\frac{1}{4}} \{\log_3 [\log_2 (3x - 1)]\} = 0$

d) $\log_2 [1 + \log_3 (1 + \log_4 x)] = 0$

e) $\log_{\sqrt{2}} \{2 \cdot \log_3 [1 + \log_4 (x + 3)]\} = 2$

f) $\log_3 [1 + 2 \cdot \log_2 (3 - \log_4 x^2)] = 1$

g) $\log_2 \{2 + 3 \cdot \log_3 [1 + 4 \cdot \log_4 (5x + 1)]\} = 3$

243. Resolva a equação: $\log_3 [\log_2 (3x^2 - 5x + 2)] = \log_3 2$.

244. Resolva as equações:

a) $x^{\log_x (x+3)} = 7$

b) $x^{\log_x (x-5)^2} = 9$

c) $x^{\log_x (x+3)^2} = 16$

d) $(\sqrt[3]{x})^{\log_x (x^2+2)} = 2 \cdot \log_3 \sqrt{27}$

245. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x^y - x^{-y} = 1 \\ \log_2 y = \sqrt{x} \end{cases}$$

246. Resolva as equações:

a) $\log_4^2 x - 2 \cdot \log_4 x - 3 = 0$

b) $6 \cdot \log_2^2 x - 7 \cdot \log_2 x + 2 = 0$

c) $\log x (\log x - 1) = 6$

d) $\log_2 x(2 \cdot \log_2 x - 3) = 2$

e) $2 \cdot \log_4^2 x + 2 = 5 \cdot \log_4 x$

f) $\log^3 x = 4 \cdot \log x$

247. Determine a solução real da equação $\sqrt[x]{3} - \sqrt[2x]{3} = 2$.

Sugestão: $\frac{1}{x} = 2y$.

248. Resolva as equações:

a) $\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1$

b) $\frac{3 + \log_2 x}{\log_2 x} + \frac{2 - \log_2 x}{3 - \log_2 x} = \frac{5}{2}$

c) $\frac{\log_3 x}{1 + \log_3 x} + \frac{\log_3 x + 2}{\log_3 x + 3} = \frac{5}{4}$

d) $\frac{1 - \log x}{2 + \log x} - \frac{1 + \log x}{2 - \log x} = 2$

e) $\frac{1 - \log_2 x}{2 - \log_2 x} - \frac{2 - \log_2 x}{3 - \log_2 x} = \frac{4 - \log_2 x}{5 - \log_2 x} - \frac{5 - \log_2 x}{6 - \log_2 x}$

249. Resolva a equação $\log_x (2x + 3) = 2$.

Solução

$$\log_x (2x + 3) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 & \text{(I)} \\ \quad \text{e} & \\ 2x + 3 = x^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (II), temos:

$x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -1$.

Somente $x = 3$ é solução, pois deve satisfazer (I).

$S = \{3\}$.

250. Resolva as equações:

a) $\log_x (3x^2 - 13x + 15) = 2$

b) $\log_x (4 - 3x) = 2$

c) $\log_{(x-2)} (2x^2 - 11x + 16) = 2$

d) $\log_{\sqrt{x}} (2x^2 + 5x + 6) = 4$

e) $\log_{(x-1)} (x^3 - x^2 + x - 3) = 3$

f) $\log_{(x+2)} (x^3 + 7x^2 + 8x + 11) = 3$

g) $\log_{(2-x)} (2x^3 - x^2 - 18x + 8) = 3$

251. Resolva a equação $\log_{(x+1)} (x^2 + x + 6) = 3$.

252. Resolva a equação $log_{(x+3)}(5x^2 - 7x - 9) = log_{(x+3)}(x^2 - 2x - 3)$.

Solução

$\log_{(x+3)}(5x^2 - 7x - 9) = \log_{(x+3)}(x^2 - 2x - 3) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 0 < x + 3 \neq 1 \\ \quad\quad \text{e} \\ 5x^2 - 7x - 9 = x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

Resolvendo

$5x^2 - 7x - 9 = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -\frac{3}{4}$;

$x = 2$ não é solução, pois, fazendo $x = 2$ em $x^2 - 2x - 3$, encontramos $2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = -3 < 0$.

é solução, pois, fazendo $x = -\frac{3}{4}$ em $x^2 - 2x - 3$ e em $x + 3$,

encontramos, respectivamente:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - 3 = -\frac{15}{16} < 0$$

$S = \emptyset$

253. Resolva as equações:

a) $\log_x (4x - 3) = \log_x (2x + 1)$
b) $\log_x (5x + 2) = \log_x (3x + 4)$
c) $\log_{(x+1)} (3x + 14) = \log_{(x+1)} (2 - x)$
d) $\log_{(x+5)} (3x^2 - 5x - 8) = \log_{(x+5)} (2x^2 - 3x)$
e) $\log_{(2x-4)} (5x^2 - 15x + 7) = \log_{(2x-4)} (x^2 - 3x + 2)$
f) $\log_{(x+2)} (3x^2 - 8x - 2) = \log_{(x+2)} (2x^2 - 5x + 2)$

254. Resolva as equações:

a) $\log_x^2 (5x - 6) - 3 \cdot \log_x (5x - 6) + 2 = 0$
b) $\log_x^2 (x + 1) = 2 + \log_x (x + 1)$
c) $2 \cdot \log_{(3x-2)}^2 (4 - x) - 5 \cdot \log_{(3x-2)} (4 - x) + 2 = 0$

255. Resolva as equações:

a) $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = 3$ b) $\log_3 (2x - 1)^2 - \log_3 (x - 1)^2 = 2$

Solução

a) Antes de aplicarmos qualquer propriedade operatória, devemos estabelecer as condições de existência para os logaritmos.

Assim sendo, devemos ter:

$$\left.\begin{cases} x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ \quad\text{e} \\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow x > 1 \quad \text{(I)}$$

Resolvendo a equação proposta para $x > 1$, temos:

$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = 3 \Rightarrow \log_2 [(x + 1)(x - 1)] = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 1)(x - 1) = 2^3 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$.

Somente $x = 3$ é solução, pois satisfaz a condição (I).

$S = \{3\}$.

b) Estabelecendo a condição de existência dos logaritmos, temos:

$$\left.\begin{matrix} (2x - 1)^2 > 0 \\ \text{e} \\ (x - 1)^2 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \neq \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1 \quad \text{(I)}$$

Resolvendo a equação proposta para $x \neq \frac{1}{2}$ e $x \neq 1$, temos:

$$\log_3 (2x - 1)^2 - \log_3 (x - 1)^2 = 2 \Rightarrow \log_3 \frac{(2x - 1)^2}{(x - 1)^2} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(2x - 1)^2}{(x - 1)^2} = 3^2 \Rightarrow \left|\frac{2x - 1}{x - 1}\right| = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x - 1}{x - 1} = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow x = 2 \\ \qquad\qquad\text{ou} \\ \dfrac{2x - 1}{x - 1} = -3 \Rightarrow 2x - 1 = -3(x - 1) \Rightarrow x = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Os dois valores encontrados são soluções, pois satisfazem a condição (I).

$S = \left\{2, \frac{4}{5}\right\}$.

256. Determine as raízes da equação

$$\log\left(x + \frac{1}{3}\right) + \log\left(x - \frac{1}{3}\right) = \log\frac{24}{9}.$$

257. Determine a solução real da equação $\log 2^x + \log (1 + 2^x) = \log 6$.

258. Determine a raiz real da equação $x + \log (1 + 2^x) = x\log 5 + \log 6$.

259. Resolva as equações:

a) $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x + 3) = 4$
b) $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 2) = 2$
c) $\log x + \log (x - 21) = 2$
d) $\log_2 (5x - 2) - \log_2 x - \log_2 (x - 1) = 2$
e) $\log_3 (5x + 4) - \log_3 x - \log_3 (x - 2) = 1$
f) $\log_{\frac{1}{2}} (3x + 2)^2 - \log_{\frac{1}{2}} (2x - 3)^2 = -4$

g) $\log_{36} (x + 2)^2 + \log_{36} (x - 3)^2 = 1$

260. Resolva a equação $(0,4)^{\log^2 x + 1} = (6,25)^{2 - \log x^3}$.

261. Resolva a equação $\log_2 (9^{x-1} + 7) - \log_2 (3^{x-1} + 1) = 2$.

262. Resolva as equações:

a) $\dfrac{\log_3 (2x)}{\log_3 (4x - 15)} = 2$

b) $\dfrac{\log_2 (35 - x^3)}{\log_2 (5 - x)} = 3$

c) $\dfrac{\log (\sqrt{x + 1} + 1)}{\log \sqrt[3]{x - 40}} = 3$

263. Resolva a equação $\dfrac{1}{2} \log_3 (x - 16) - \log_3 (\sqrt{x} - 4) = 1$.

264. Resolva a equação $\log_3 (4^x + 15 \cdot 2^x + 27) = 2 \cdot \log_3 (2^{x+2} - 3)$.

265. Resolva a equação $\log_2 (x - 2) + \log_2 (3x - 2) = \log_2 7$.

Solução

Vamos estabelecer, inicialmente, a condição de existência dos logaritmos, isto é:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ 3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow x > 2 \quad \text{(I)}$$

►

Resolvendo a equação, temos:

$\log_2 (x-2) + \log_2 (3x-2) = \log_2 7 \Rightarrow \log_2 [(x-2)(3x-2)] = \log_2 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)(3x-2) = 7 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -\dfrac{1}{3}$

Somente $x = 3$ é solução, pois satisfaz a condição (I).
$S = \{3\}$.

266. Resolva as equações:

a) $\log_2 (x+4) + \log_2 (x-3) = \log_2 18$
b) $\log_5 (1-x) + \log_5 (2-x) = \log_5 (8-2x)$
c) $\log_{\frac{1}{2}} (x+1) + \log_{\frac{1}{2}} (x-5) = \log_{\frac{1}{2}} (2x-3)$
d) $\log (2x+1) + \log (4x-3) = \log (2x^2 - x - 2)$
e) $\log_2 (4-3x) - \log_2 (2x-1) = \log_2 (3-x) - \log_2 (x+1)$
f) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 13x) + \text{colog}_{\frac{1}{3}} (x+3) = \log_{\frac{1}{3}} (3x-1)$
g) $\log (2x^2 + 4x - 4) + \text{colog} (x+1) = \log 4$

267. Resolva a equação $2 \cdot \log (\log x) = \log (7 - 2 \cdot \log x) - \log 5$.

268. Resolva a equação $\log \sqrt{7x+5} + \dfrac{1}{2} \log (2x+7) = 1 + \log \dfrac{9}{2}$.

269. Resolva as equações:

a) $\sqrt{\log x} = \log \sqrt{x}$
b) $\log^{-1} x = 2 + \log x^{-1}$
c) $\log_8 x^3 = 5 + \dfrac{12}{\log_8 x}$

270. Resolva a equação $\log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 (3^{x+1} - 3) = 6$.

271. Resolva as equações:

a) $\log^2 x^3 - 20 \cdot \log \sqrt{x} + 1 = 0$
b) $\log_x 5\sqrt{5} - 1{,}25 = \log_x^2 \sqrt{5}$
c) $\dfrac{\log_8 \left(\dfrac{8}{x^2}\right)}{\log_8^2 x} = 3$

272. Resolva a equação $x^2 + x \cdot \log 5 - \log 2 = 0$.

273. Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 12 \end{cases}$$

Solução

Aplicando a propriedade dos logaritmos na segunda equação, temos:

$\log_2 x + \log_2 y = \log_2 12 \Rightarrow \log_2 (xy) = \log_2 12 \Rightarrow xy = 12.$

O sistema proposto fica então reduzido às equações

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

cujas soluções são $x = 3$ e $y = 4$ ou $x = 4$ e $y = 3$.

$S = \{(3,4), (4,3)\}$.

274. Resolva os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4^{x-y} = 8 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x^2 + y = 75 \\ 2 \cdot \log x - \log y = 2 \cdot \log 2 + \log 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 512 \\ \log \sqrt{xy} = 1 + \log 2 \end{cases}$

275. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2^{\log_{\frac{1}{2}} (x + y)} = 5^{\log_5 (x - y)} \\ \log_2 x + \log_2 y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

276. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3 \\ \log_3 x + \text{colog}_3\, y = 1 \end{cases}$$

Solução

Lembrando que $colog_3\, y = -log_3\, y$ e fazendo a substituição $log_3\, x = a$ e $log_3\, y = b$ no sistema proposto, temos:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 1$$

mas $a = log_3\, x$ e $b = log_3\, y$, então:

$\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9$
$\log_3 y = 1 \Rightarrow y = 3$
$S = \{(9, 3)\}$.

277. Resolva os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} 3 \cdot \log x - 2 \cdot \log y = 0 \\ 4 \cdot \log x + 3 \cdot \log y = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2 \cdot \log_2 x + 3 \cdot \log_2 y = 27 \\ 5 \cdot \log_2 x - 2 \cdot \log_2 y = 1 \end{cases}$

278. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} \log_2 (xy) \cdot \log_2 \left(\dfrac{x}{y}\right) = -3 \\ \log_2^2 x + \log_2^2 y = 5 \end{cases}$$

279. Resolva a equação $4 \cdot x^{log_2 x} = x^3$.

Solução

Aplicando logaritmo de base 2 a ambos os membros, temos:

$4 \cdot x^{\log_2 x} = x^3 \Rightarrow \log_2 (4 \cdot x^{\log_2 x}) = \log_2 x^3 \Rightarrow \log_2 4 +$
$+ (\log_2 x) \cdot (\log_2 x) = 3 \cdot \log_2 x \Rightarrow (\log_2 x)^2 - 3 \cdot \log_2 x + 2 = 0$

Fazendo $log_2\, x = y$, temos:

$y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 2$.

Mas $y = log_2\, x$, então:

$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$
$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$
$S = \{2, 4\}$.

280. Resolva as equações:

a) $9 \cdot x^{\log_3 x} = x^3$

b) $x^{\log x} = 100 \cdot x$

c) $16^{\log_x 2} = 8x$

d) $9^{\log_{\sqrt{x}} 3} = 27x$

e) $3^{2 \cdot \log_x 3} = x^{\log_x 3x}$

281. Resolva a equação $2^{\log_x (x^2-6x+9)} = 3^{2 \cdot \log_x \sqrt{x} - 1}$.

282. Resolva as equações:

a) $\log (x^{\log x}) = 1$

b) $x^{\log x - 1} = 100$

c) $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$

283. Resolva as equações:

a) $x^{3 \cdot \log^2 x - \frac{2}{3} \cdot \log x} = 100 \sqrt[3]{10}$

b) $x^{\log_3^3 x - \log_3 x^3} = 3^{-3 \cdot \log_{2\sqrt{2}} 4 + 8}$

c) $x^{\log^2 x - 3 \cdot \log x + 1} = 1\,000$

284. Resolva a equação $\log_x (2 \cdot x^{x-2} - 1) = 2x - 4$.

285. Resolva a equação $3 + \log_x \left(\frac{x^{4x-6} + 1}{2} \right) = 2x$.

286. Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x \cdot y = 16 \\ \log_2 x = 2 + \log_2 y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \cdot y = 32 \\ x^{\log_2 y} = 64 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \\ x^y = 5^{12} \end{cases}$

287. Resolva a equação $\log_2 (x - 2) = \log_2 (x^2 - x + 6) + \log_{\frac{1}{2}} (2x + 1)$.

Solução

Estabelecendo inicialmente a condição de existência dos logaritmos, temos:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x^2 - x + 6 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ 2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x > 2 \quad \text{(I)}$$

Aplicando as propriedades e transformando os logaritmos à base *2*, temos:

$\log_2 (x - 2) = \log_2 (x^2 - x + 6) + \log_{2^{-1}} (2x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x - 2) = \log_2 (x^2 - x + 6) - \log_2 (2x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x - 2) = \log_2 \frac{x^2 - x + 6}{2x + 1} \Rightarrow x - 2 = \frac{x^2 - x + 6}{2x + 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = x^2 - x + 6 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \text{ (não convém)} \end{cases}$

$S = \{4\}$.

288. Resolva as equações:

a) $\log_3 (x + 2) - \log_{\frac{1}{3}} (x - 6) = \log_3 (2x - 5)$

b) $\log_2 (x + 2) + \log_{\frac{1}{2}} (5 - x) + \text{colog}_{\frac{1}{2}} (x - 1) = \log_2 (8 - x)$

c) $\log_3 (x^2 - 2x + 2) + \log_{\frac{1}{3}} (2x + 1) = \log_3 (x - 4)$

289. Resolva a equação $\log_2^2 x - 9 \cdot \log_8 x = 4$.

Solução

$\log_2^2 x - 9 \cdot \log_8 x = 4 \Rightarrow \log_2^2 x - 9 \cdot \log_{2^3} x - 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2^2 x - 3 \cdot \log_2 x - 4 = 0.$

Fazendo $\log_2 x = y$, temos:

$y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4$ ou $y = -1$ mas $y = \log_2 x$, então:

$\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16$

$\log_2 x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$S = \left\{16, \dfrac{1}{2}\right\}.$

290. Resolva as equações:

a) $\log_3^2 x - 5 \cdot \log_9 x + 1 = 0$

b) $\log_2^2 x - \log_8 x^8 = 1$

c) $\log_3^2 x = 2 + \log_9 x^2$

291. Resolva as equações:

a) $\sqrt{\log_2 x^4} + 4 \cdot \log_4 \sqrt{\dfrac{2}{x}} = 2$

b) $\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4 \cdot \log_4 x - 2} = 4$

292. Resolva a equação:

$$\frac{1 + \log_2 (x - 4)}{\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3})} = 1$$

293. Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} (y - x) + \log_2 \dfrac{1}{y} = -2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_9 (x^2 + 1) - \log_3 (y - 2) = 0 \\ \log_2 (x^2 - 2y^2 + 10y - 7) = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_9 (x^2 + 2) + \log_{81} (y^2 + 9) = 2 \\ 2 \cdot \log_4 (x + y) - \log_2 (x - y) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_3 (\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}} (\log_{\frac{1}{2}} y) = 1 \\ xy^2 = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = a \\ \log_4 x - \log_8 y = b \end{cases}$

294. Resolva a equação $log_2\, x + log_x\, 2 = 2$.

Solução

Lembrando que $log_x\, 2 = \dfrac{1}{log_2\, x}$, temos: $log_2\, x + \dfrac{1}{log_2\, x} = 2$.

Fazendo $log_2\, x = y$, vem:

$y + \dfrac{1}{y} = 2 \Rightarrow y = 1$

mas $y = log_2\, x$, então $log_2\, x = 1 \Rightarrow x = 2$.
$S = \{2\}$.

295. Determine o conjunto solução da equação
$\log_4 (x - 3) - \log_{16} (x - 3) = 1,\ x > 3$.

296. Sejam a e b dois números reais, $a > 0$ e $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Que relação devem satisfazer a e b para que a equação $x^2 - x\,(log_b\, a) + 2\ log_a\, b = 0$ tenha duas raízes reais e iguais?

297. Determine o valor de x, sabendo que $log_2\, x = log_{\sqrt{x}}\, x^2 + log_x\, 2$.

298. Determine o valor de x, sabendo que $log_{a^2}\, x + log_{x^2}\, a = 1$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \neq 1$.

299. Resolva a equação $log_x\, (x + 1) = log_{(x+1)}\, x$, em que x é um número real.

300. Resolva as equações:

a) $\log_2 x = \log_x 2$

b) $\log_3 x = 1 + \log_x 9$

c) $\log_2 x - 8 \cdot \log_{x^2} 2 = 3$

d) $\log_{\sqrt{x}} 2 + 4 \cdot \log_4 x^2 + 9 = 0$

301. Resolva as equações:

a) $\log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6}$

b) $\sqrt{1 + \log_x \sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0$

302. Resolva a equação $1 + 2 \cdot \log_x 2 \cdot \log_4 (10 - x) = \dfrac{2}{\log_4 x}$.

303. Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2} \\ xy = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3 \cdot (2 \cdot \log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y) = 10 \\ xy = 81 \end{cases}$

304. Resolva a equação $\dfrac{1}{\log_6 (x + 3)} + \dfrac{2 \cdot \log_{0,25} (4 - x)}{\log_2 (3 + x)} = 1$.

305. Resolva a equação $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$.

Solução

$\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\log_2 x} \cdot \dfrac{1}{\log_2 \dfrac{x}{16}} = \dfrac{1}{\log_2 \dfrac{x}{64}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 x \cdot \log_2 \dfrac{x}{16} = \log_2 \dfrac{x}{64} \Rightarrow \log_2 x \cdot (\log_2 x - 4) = \log_2 x - 6$

Fazendo $\log_2 x = y$, vem:

$y(y - 4) = y - 6 \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $y = 3$

mas $y = \log_2 x$, então:

$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$

$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 8$

$S = \{4, 8\}$.

306. Resolva as equações:

a) $\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0$

b) $\log_{3x} \left(\frac{3}{x}\right) + \log_3 27x^2 = 5$

c) $\dfrac{1}{\log_x 8} + \dfrac{1}{\log_{2x} 8} + \dfrac{1}{\log_{4x} 8} = 2$

d) $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14 \cdot \log_{16x} x^3 + 40 \cdot \log_{4x} \sqrt{x} = 0$

307. Resolva a equação

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} 10 \cdot \log_{10} (x^2 - 3x + 2) = -2 + \log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} 10 \cdot \log_{10} (x - 3).$$

308. Resolva a equação

$$x^{\log_2^2 x^2 - \log_2 (2x) - 2} + (x + 2)^{\log_{(x+2)^2} 4} = 3$$

309. Resolva as equações, sabendo que $0 < a \neq 1$:

a) $\log_a (ax) \cdot \log_x (ax) = \log_{a^2} \dfrac{1}{a}$

b) $2 \cdot \log_x a + \log_{ax} a + 3 \cdot \log_{a^2x} a = 0$

c) $\log_x (ax) \cdot \log_a x = 1 + \log_x \sqrt{a}$

d) $\dfrac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} + \log_{ax} a \cdot \log_{\frac{1}{a}} 2x = 0$

310. Resolva a equação, sabendo que *a* e *b* são reais positivos e diferentes de *1*:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2^2 a} - \frac{2 \cdot \log_a x}{\log_{\frac{1}{b}} a} = \log_{\sqrt[3]{a}} x \cdot \log_a x$$

311. Resolva a equação $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1$.

312. Resolva a equação, sabendo que $0 < a \neq 1$: $10^{\log_a (x^2 - 3x + 5)} = 3^{\log_a 10}$.

313. Resolva a equação:

$$1 + \frac{\log (a - x)}{\log (x + b)} = \frac{2 - \log_{(a-b)} 4}{\log_{(a-b)} (x + b)}$$

sabendo que $a > b > 0$ e $a - b \neq 1$.

314. Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x^2 + 4y^3 = 96 \\ \log_{y^2} 2 = \log_{xy} 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \cdot x^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y \cdot \log_y (y - 3x) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \cdot \log_2 y \cdot \log_{\frac{1}{x}} 2 = y\sqrt{y}\,(1 - \log_x 2) \\ \log_{y^3} 2 \cdot \log_{\sqrt{2}} x = 1 \end{cases}$

315. Resolva o sistema: $\begin{cases} \log_2 (x + y) - \log_3 (x - y) = 1. \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$

316. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$$

317. Sendo *a* e *b* reais positivos e diferentes de *1*, resolva o sistema:

$\begin{cases} a^x \cdot b^y = ab \\ 2 \cdot \log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \cdot \log_{\sqrt{a}} b \end{cases}$

318. Resolva o sistema de equações:

$\begin{cases} \log_{12} x \cdot (\log_2 x + \log_2 y) = \log_2 x \\ \log_2 x \cdot \log_3 (x + y) = 3 \cdot \log_3 x \end{cases}$

319. Resolva os sistemas de equações para $x > 0$ e $y > 0$:

a) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^6 y^3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^y = y^x \\ 2^x = 3^y \end{cases}$

320. Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 200 \\ \sqrt{x^{\log y} \cdot y^{\log x}} = y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 200 \\ \sqrt[x]{(\log x \cdot \log y)^y} = 1\,024 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$

LEITURA

Gauss e o Universal em Matemática

Hygino H. Domingues

Novos ventos começaram a soprar na virada do século XVIII para o XIX sobre a pesquisa matemática. De um lado verificou-se um abandono progressivo da idéia de que essa pesquisa devesse vincular-se necessariamente a problemas práticos. Do outro, com o crescimento enorme e a diversificação do campo da matemática, começa a surgir a figura do especialista. Mas o espaço para o universalismo em matemática ainda não estava totalmente esgotado, como o mostra a brilhante obra de Carl F. Gauss (1777-1855).

Gauss nasceu em Brunswick, Alemanha, sendo seus pais pessoas bastante simples e pobres. Porém, desde muito cedo ele se revelou uma notável criança prodígio, especialmente quanto à matemática. Quando adulto costumava brincar dizendo que aprendera a calcular sozinho, antes de saber falar. Dentre suas proezas matemáticas infantis conta-se que aos 10 anos de idade surpreendeu seu professor ao fazer rapidamente (e com acerto) uma tarefa supostamente difícil e trabalhosa: efetuar a adição $1 + 2 + \ldots + 99 + 100$. Posteriormente Gauss explicou o raciocínio que usara. Observando de pronto que $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \ldots = 101$, não teve dificuldade em obter a soma fazendo $50 \times 101 = 5\ 050$.

A brilhante inteligência de Gauss chamou a atenção do duque Ferdinand de Brunswick, que se propôs a custear seus estudos, primeiro numa escola preparatória local e depois na Universidade de Göttingen (1795 a 1798). Durante sua passagem pela escola preparatória o adolescente Gauss formulou, independentemente, o método dos mínimos quadrados para estimar o valor mais provável de uma variável a partir de um conjunto de observações aleatórias. Gauss divide a primazia da criação desse método com Legendre, que foi o primeiro a publicá-lo em 1806.

Nos primeiros tempos de Göttingen, Gauss estava indeciso entre a matemática e a filosofia, um campo para o qual demonstrava, também, grande aptidão. Mas uma descoberta extraordinária feita por ele em março de 1796 inclinou-o de vez para a matemática. Com efeito, com menos de 20 anos de idade conseguiu provar que um polígono regular de 17 lados é construível com régua e compasso, resolvendo um problema que estava em aberto desde os tempos de Euclides.

►

Concluída a graduação, voltou a Brunswick e, ainda com assistência financeira de seu patrono, prosseguiu com suas pesquisas matemáticas. E aos 21 anos de idade, dispensado do exame habitual, obteve o doutorado na Universidade de Helmstädt. Sua tese fornece a primeira demonstração satisfatória (embora sem corresponder aos padrões atuais de rigor) do teorema fundamental da álgebra. Este teorema garante que toda equação polinomial $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, em que os coeficientes são reais ou complexos, tem pelo menos uma raiz no corpo dos complexos. Posteriormente Gauss daria mais três demonstrações desse teorema.

Talvez o campo da matemática em que a genialidade de Gauss tenha brilhado mais seja a teoria dos números, pela qual sempre teve inclinação especial. E sua obra-prima, *Disquisitiones arithmeticae* (1801), pelo seu alto grau de originalidade, é considerada o marco fundamental da moderna teoria dos números. Resumidamente, essa obra trata da teoria das congruências (criada por Gauss), da teoria dos restos quadráticos (incluindo a lei da reciprocidade quadrada, para a qual Gauss já tinha uma demonstração em 1795) e do estudo das equações binômias $x^n = 1$ e suas ligações com a construção de polígonos regulares.

Carl F. Gauss (1777-1855).

Mas, se os feitos de Gauss na matemática pura eram extraordinários, na astronomia não ficavam atrás. O primeiro envolve o planeta menor Ceres, descoberto a 1º de janeiro de 1801 pelo astrônomo Giuseppe Piazzi (1746-1826). Ocorre que, depois de 41 dias de observação, período em que sua órbita descreveu um ângulo de apenas 9°, Ceres (ao passar pelo Sol) desapareceu do foco dos telescópios de Piazzi e outros astrônomos. Com os poucos dados disponíveis, Gauss calculou a órbita de Ceres com tal precisão, que foi possível localizar o planeta desaparecido, ao final de 1801, praticamente na mesma posição em que fora perdido de vista. No ano seguinte Gauss desenvolveu um trabalho semelhante com o planeta menor Pallas. Assim, não é de surpreender que Gauss tenha sido nomeado professor de astronomia e diretor do observatório astronômico de Göttingen em 1807. Isso obviamente fez com que, daí para a frente, apesar do ecletismo de seu talento e de seu gosto pela mate-

mática, dirigisse suas pesquisas mais para a física e a astronomia. Diga-se de passagem que uma de suas grandes obras é *Theoria motus corporum coelestium* (1809), no campo da astronomia teórica.

Para Gauss (como para Newton) teoria e prática eram duas faces da mesma moeda. Assim é que em 1812 publicou um conjunto de tábuas cujo objetivo era fornecer $log\ (a \pm b)$ conhecidos os valores de $log\ a$ e $log\ b$. Essas tábuas foram amplamente utilizadas por marinheiros para resolver problemas de navegação. Ou seja, mesmo trabalhos que para outros seriam considerados praticamente "braçais" e portanto "menores" mereciam sua atenção, em face da importância prática que podiam ter.

Porém, seja por excesso de zelo, seja para evitar polêmicas, Gauss publicava relativamente pouco. Foi preciso que se descobrisse (em 1898) um diário deixado por ele, contendo 148 breves enunciados, para que se tivesse uma idéia mais precisa de quanto ele era incansável e do alcance de sua genialidade. Por exemplo, embora tenha descoberto a geometria não euclidiana hiperbólica em 1824 (como o prova carta ao amigo F.A. Taurinos), nada publicou a respeito, perdendo assim a primazia desse grande avanço matemático para Lobachevski (cuja primeira publicação a respeito é de 1829).

O selo usado por Gauss revela bem essa faceta de sua personalidade: era uma árvore com poucos frutos e a divisa *pauca sed matura* (poucos, porém maduros).

CAPÍTULO VI

Inequações Exponenciais e Logarítmicas

I. Inequações exponenciais

Como havíamos prometido no primeiro estudo de inequações exponenciais, voltamos novamente a esse assunto.

Enfocaremos agora as inequações exponenciais que não podem ser reduzidas a uma desigualdade de potências de mesma base por meio de simples aplicações das propriedades de potências.

68. A resolução de uma inequação deste tipo baseia-se no crescimento ou decrescimento da função logarítmica, isto é, se $a^x > 0$, $b > 0$ e $0 < c \neq 1$, tem-se:

$$\text{(I)}\ a^x > b \Leftrightarrow \begin{cases} \log_c a^x > \log_c b \text{ se } c > 1 \\ \log_c a^x < \log_c b \text{ se } 0 < c < 1 \end{cases}$$

$$\text{(II)}\ a^x < b \Leftrightarrow \begin{cases} \log_c a^x < \log_c b \text{ se } c > 1 \\ \log_c a^x > \log_c b \text{ se } 0 < c < 1 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

321. Resolva as inequações:

a) $3^x > 2$

b) $2^{3x-1} \leqslant \frac{1}{5}$

Solução

a) Tomando os logaritmos de ambos os membros da desigualdade na base *3* e mantendo a desigualdade, pois a base do logaritmo é maior que *1*, temos:

$$3^x > 2 \Rightarrow \log_3 3^x > \log_3 2 \Rightarrow x \cdot \log_3 3 > \log_3 2 \Rightarrow x > \log_3 2$$

A escolha da base *3* para o logaritmo visou obter uma simplificação na resolução. Obteríamos o mesmo resultado se tomássemos os logaritmos em qualquer outra base.

Por exemplo, tomando os logaritmos na base $\frac{1}{5}$ e invertendo a desigualdade, temos:

$$3^x > 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{5}} 3^x < \log_{\frac{1}{5}} 2 \Rightarrow x \cdot \log_{\frac{1}{5}} 3 < \log_{\frac{1}{5}} 2 \xrightarrow{(\log_{\frac{1}{5}} 3 < 0)}$$

$$\Rightarrow x > \frac{\log_{\frac{1}{5}} 2}{\log_{\frac{1}{5}} 3} \Rightarrow x > \log_3 2$$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_3 2\}$.

b) $2^{3x-1} \leqslant \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{2^{3x}}{2} \leqslant \frac{1}{5} \Rightarrow 8^x \leqslant \frac{2}{5} \Rightarrow \log_8 8^x \leqslant \log_8 \frac{2}{5} \Rightarrow x \leqslant \log_8 \frac{2}{5}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_8 \frac{2}{5}\right\}$.

322. Resolva as inequações:

a) $4^x > 7$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 5$

c) $2^{3x+2} > 9$

d) $5^{4x-1} < 3$

e) $3^{2-3x} < \frac{1}{4}$

f) $3^{\sqrt{x}} > 4$

g) $2^{(x^2)} \leqslant 5$

323. Resolva a inequação $3^{2x-1} > 2^{3x+1}$.

Solução

$$3^{2x-1} > 2^{3x+1} \Rightarrow \frac{3^{2x}}{3} > 2^{3x} \cdot 2 \Rightarrow \frac{(3^2)^x}{(2^3)^x} > 2 \cdot 3 \Rightarrow \frac{9^x}{8^x} > 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{9}{8}\right)^x > 6 \Rightarrow \log_{\frac{9}{8}} \left(\frac{9}{8}\right)^x > \log_{\frac{9}{8}} 6 \Rightarrow x > \log_{\frac{9}{8}} 6$$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{\frac{9}{8}} 6\}$.

324. Resolva as inequações:

a) $2^x > 3^{x-1}$

b) $2^{3x-1} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+3} > 2^{4x-3}$

d) $2^{x-2} > 3^{2x-1}$

325. Resolva as inequações:

a) $5^x > 3^x + 3^{x+1}$

b) $3^x + 3^{x+1} \leqslant 2^x - 2^{x-1}$

c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} > 3^{x+1} - 3^x$

d) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} < 2^{x-2} - 2^x$

e) $2^x + 2^{x+1} - 2^{x+3} < 5^{x+2} - 5^{x-1}$

326. Resolva as inequações:

a) $2^{3x+1} \cdot 5^{2x-3} > 6$

b) $3^{2x-1} \cdot 2^{5-4x} > 5$

327. Resolva as inequações:

a) $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 > 0$

b) $4^x - 2^{x+2} + 3 < 0$

c) $25^x - 5^x - 6 \geqslant 0$

d) $4^{x+\frac{1}{2}} - 2^x - 3 \leqslant 0$

e) $25^x + 5^{x+1} + 4 \leqslant 0$

f) $2 \cdot 9^x + 3^{x+2} + 4 >$ (

328. Resolva a inequação $9^x - 6^x - 4^x > 0$.

329. Resolva a inequação $4^x - 6 \cdot 10^x + 8 \cdot 25^x \leqslant 0$.

330. Resolva a inequação $4^{x+1} - 8 \cdot 6^x + 9^{x+\frac{1}{2}} \geqslant 0$.

II. Inequações logarítmicas

Assim como classificamos as equações logarítmicas em três tipos básicos, vamos também classificar as inequações logarítmicas em três tipos:

69. 1º tipo: $log_a f(x) > log_a g(x)$

É a inequação que é redutível a uma desigualdade entre dois logaritmos de mesma base a $(0 < a \neq 1)$.

Como a função logaritmo é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, devemos considerar dois casos:

1º caso

Quando a base é maior que 1, a relação de desigualdade existente entre os logaritmandos é de mesmo sentido que a dos logaritmos. Não nos devemos esquecer que, para existirem os logaritmos em $\mathbb{R}$, os logaritmandos deverão ser positivos.

Esquematicamente, temos:

> Se $a > 1$, então
> $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0.$

2º caso

Quando a base é positiva e menor que 1, a relação de desigualdade existente entre os logaritmandos é de sentido contrário à dos logaritmos. Também não nos podemos esquecer que os logaritmandos deverão ser positivos para que os logaritmos sejam reais.

Esquematicamente, temos:

> Se $0 < a < 1$, então
> $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x).$

Agrupando os dois casos num só esquema, temos:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 \quad \text{se} \quad a > 1 \\ \quad \text{ou} \\ 0 < f(x) < g(x) \quad \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

70. Exemplos

1º) Resolver a inequação $log_2\,(2x - 1) < log_2\,6$.

Solução

Observe que a base é maior que *1*, logo a desigualdade entre os logaritmandos tem o mesmo sentido que a dos logaritmos.

$$\log_2(2x - 1) < \log_2 6 \Rightarrow 0 < 2x - 1 < 6 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}\right\}$$

2º) Resolver a inequação $log_{\frac{1}{3}}\,(x^2 - 4x) > log_{\frac{1}{3}}\,5$.

Solução

Observe que agora a base é menor que *1*, logo a desigualdade entre os logaritmandos tem sentido contrário à dos logaritmos.

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x) > \log_{\frac{1}{3}} 5 \Rightarrow 0 < x^2 - 4x < 5 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x > 0 \Rightarrow x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 4 \quad \text{(I)} \\ \qquad\qquad\qquad \text{e} \\ x^2 - 4x < 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow -1 < x < 5 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

(I) ——— 0 ——— 4 ——— x

(II) ——— −1 ——— 5 ——— x

(I) ∩ (II) ——— −1 ——— 0 ——— 4 ——— 5 ——— x

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \quad \text{ou} \quad 4 < x < 5\}$.

3º) Resolver a inequação $log_5\,(x^2 - 2x - 6) \geqslant log_5\,2$.

Solução

$\log_5(x^2 - 2x - 6) \geqslant \log_5 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 6 \geqslant 2 \Rightarrow$

$x^2 - 2x - 8 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 4$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 4\}$.

71. 2º tipo: $\log_a f(x) \gtrless k$

É a inequação logarítmica que é redutível a uma desigualdade entre um logaritmo e um número real.

Para resolvermos uma inequação deste tipo, basta notarmos que o número real k pode ser assim expresso

$$k = k \cdot \log_a a = \log_a a^k$$

Portanto, são equivalentes as inequações:

$$\log_a f(x) > k \Leftrightarrow \log_a f(x) > \log_a a^k$$

e

$$\log_a f(x) < k \Leftrightarrow \log_a f(x) < \log_a a^k$$

Pelo estudo já feito no tipo anterior, temos, esquematicamente:

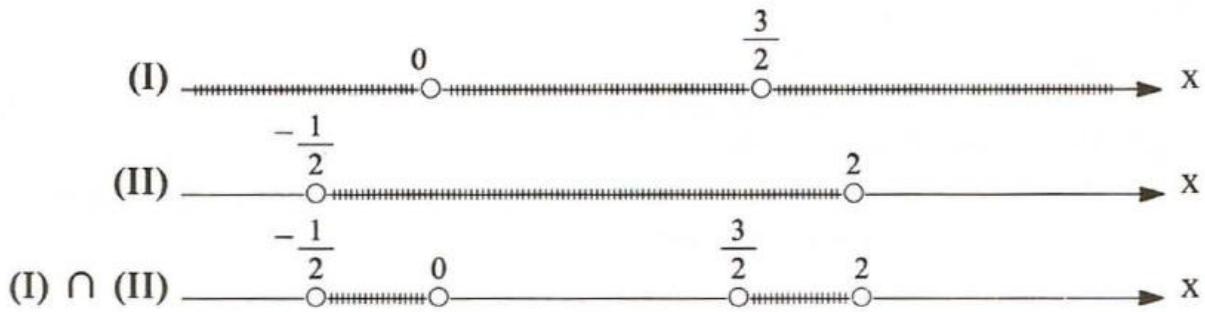
$$\log_a f(x) > k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^k & \text{se } a > 1 \\ 0 < f(x) < a^k & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) < k \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^k & \text{se } a > 1 \\ f(x) > a^k & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

72. Exemplos

1º) Resolver a inequação $\log_3 (3x + 2) < 2$.

Solução

$$\log_3 (3x + 2) < 2 \Rightarrow 0 < 3x + 2 < 3^2 \Rightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{7}{3}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < \frac{7}{3}\right\}.$$

2º) Resolver a inequação $\log_{\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x) > -1$.

Solução

$$\log_{\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x) > -1 \Rightarrow 0 < 2x^2 - 3x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x < 0 \text{ ou } x > \frac{3}{2} \quad \text{(I)} \\ \text{e} \\ 2x^2 - 3x < 2 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

(I) number line: open circles at 0 and $\frac{3}{2}$; shaded up to 0, between 0 and $\frac{3}{2}$, and after $\frac{3}{2}$ (x)

(II) number line: open circles at $-\frac{1}{2}$ and 2; shaded between $-\frac{1}{2}$ and 2 (x)

(I) ∩ (II) number line: open circles at $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{3}{2}$, 2; shaded between $-\frac{1}{2}$ and 0 and between $\frac{3}{2}$ and 2 (x)

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{3}{2} < x < 2\right\}.$$

3º) Resolver a inequação $log_{\frac{1}{3}} (2x^2 - 7x + 5) \leqslant -2$.

Solução

$$\log_{\frac{1}{3}} (2x^2 - 7x + 5) \leqslant -2 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 \geqslant 9 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x \geqslant 4$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x \geqslant 4\right\}.$$

73. *3º tipo: "incógnita auxiliar"*

São as inequações que resolvemos fazendo inicialmente uma mudança de incógnita.

74. *Exemplo*

Resolver a inequação $log_3^2 x - 3 \cdot log_3 x + 2 > 0$.

Solução

Fazendo $log_3 x = y$, temos:

$y^2 - 3y + 2 > 0 \Rightarrow y < 1$ ou $y > 2$, mas $y = log_3 x$, então:

$\log_3 x < 1 \Rightarrow 0 < x < 3^1$ ou $\log_3 x > 2 \Rightarrow x > 3^2 = 9$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3 \quad \text{ou} \quad x > 9\}$.

EXERCÍCIOS

331. Resolva as inequações:

a) $\log_3 (5x - 2) < \log_3 4$

b) $\log_{0,3} (4x - 3) < \log_{0,3} 5$

c) $\log_{\frac{1}{2}} (3x - 1) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} (2x + 3)$

d) $\log_2 (2x^2 - 5x) \leqslant \log_2 3$

e) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) > \log_{\frac{1}{2}} (3x + 9)$

f) $\log_{\frac{1}{10}} (x^2 + 1) < \log_{\frac{1}{10}} (2x - 5)$

g) $\log (x^2 - x - 2) < \log (x - 4)$

332. Resolva as inequações:

a) $\log_5 (x^2 - x) > \log_{0,2} \frac{1}{6}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x - \frac{3}{4} \right) > 2 - \log_2 5$

333. Resolva a inequação $\log x - \operatorname{colog} (x + 1) > \log 12$.

334. Resolva as inequações:

a) $\log_2 (2 - x) < \log_{\frac{1}{2}} (x + 1)$

b) $\frac{1}{\log_2 x} \leqslant \frac{1}{\log_2 \sqrt{x + 2}}$

335. Resolva as inequações:

a) $\log_2 (3x + 5) > 3$

b) $\log_{\frac{1}{3}} (4x - 3) \geqslant 2$

c) $\log_2 (x^2 + x - 2) \leqslant 2$

d) $\log_{\frac{1}{2}} (2x^2 - 6x + 3) < 1$

e) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x - 5) > -4$

f) $\log_{\frac{5}{8}} \left(2x^2 - x - \frac{3}{8} \right) \geqslant 1$

g) $\log (x^2 + 3x + 3) > 0$

h) $\log_{0,3} (x^2 - 4x + 1) \geqslant 0$

336. Resolva a inequação $\log_a (2x - 3) > 0$, para $0 < a < 1$.

337. Resolva as inequações:

a) $2 < \log_2 (3x + 1) < 4$

b) $2 < \log_2 (3 - 2x) \leqslant 3$

c) $\frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}} (2x) < 1$

d) $0 < \log_3 (x^2 - 4x + 3) < 1$

338. Resolva a inequação $1 \leqslant \log_{10} (x - 1) \leqslant 2$, com $x > 1$.

339. Resolva as inequações:

a) $|\log_2 x| > 1$

b) $|\log_3 (x - 3)| \geqslant 2$

c) $|\log x| < 1$

d) $|2 + \log_2 x| \geqslant 3$

e) $|\log_3 (x^2 - 1)| < 1$

340. Resolva as inequações:

a) $3 \cdot \log_3^2 x + 5 \cdot \log_3 x - 2 \leqslant 0$

b) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 3 \cdot \log_{\frac{1}{2}} x - 4 > 0$

c) $\log_2^2 x < 4$

d) $1 < \log^2 x < 3$

e) $\log^4 x - 5 \cdot \log^2 x + 4 < 0$

f) $\dfrac{1}{\log_2 x} - \dfrac{1}{\log_2 x - 1} < 1$

341. Determine as soluções da desigualdade $2\,(\log_e x)^2 - \log_e x > 6$.

342. Resolva as inequações:

a) $\log_2 x - 6 \cdot \log_x 2 + 1 > 0$

b) $\log_2 x - \log_x 8 - 2 \geqslant 0$

c) $(\log_2 x)^4 - \left(\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x^5}{4}\right)^2 - 20 \cdot \log_2 x + 148 < 0$

343. Determine os valores de x que verificam a desigualdade

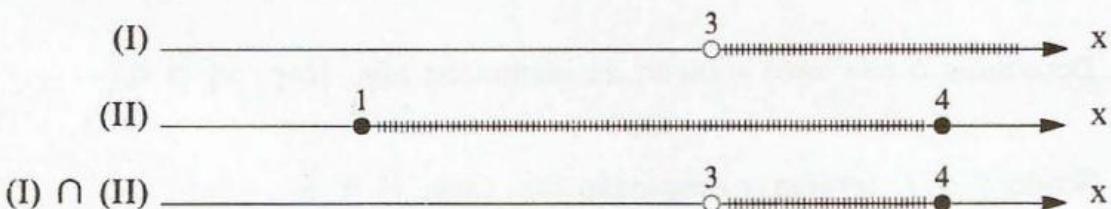
$$\frac{1}{\log_e x} + \frac{1}{\log_x e - 1} > 1.$$

344. Resolva a inequação $1 - \sqrt{1 - 8\,(\log_{\frac{1}{4}} x)^2} < 3 \cdot \log_{\frac{1}{4}} x$.

345. Resolva a inequação $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$.

346. Resolva a inequação $\dfrac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1$, para $0 < a < 1$.

347. Resolva a inequação $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 2) \leqslant 1$.

Solução

Antes de aplicarmos as propriedades operatórias dos logaritmos devemos estabelecer a condição para a existência dos logaritmos, isto é:

$$\left.\begin{array}{l} x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ \quad\text{e} \qquad\qquad \text{e} \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x > 3 \quad \text{(I)}$$

Resolvendo a inequação, temos:
$\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 2) \leqslant 1 \Rightarrow \log_2 (x - 3)(x - 2) \leqslant 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 3)(x - 2) \leqslant 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 \leqslant 0 \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant 4$ (II)
A solução da inequação proposta são os valores de x que satisfazem simultaneamente (I) e (II); portanto:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 4\}$.

348. Resolva as inequações:

a) $\log_3 (3x + 4) - \log_3 (2x - 1) > 1$
b) $\log_2 (x) + \log_2 (x + 1) < \log_2 (2x + 6)$
c) $\log_2 (3x + 2) - \log_2 (1 - 2x) > 2$
d) $\log (2x - 1) - \log (x + 2) < \log 3$
e) $\log_3 (x^2 + x - 6) - \log_3 (x + 1) > \log_3 4$
f) $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) + \log_{\frac{1}{2}} (3x - 2) \geqslant -2$

349. Determine os valores de x para os quais $\log_{10} x + \log_{10} (x + 3) < 1$.

350. Resolva as inequações:

a) $\log_2 \sqrt{6x + 1} + \log_2 \sqrt{x + 1} > \log_4 3$
b) $\log_4 (8x) - \log_2 \sqrt{x - 1} - \log_2 \sqrt{x + 1} < \log_2 3$

351. Resolva a inequação $\log_4 (2x^2 + x + 1) - \log_2 (2x - 1) \leqslant 1$.

352. Resolva a inequação $\log_2 [\log_{\frac{1}{2}} (\log_3 x)] > 0$.

Solução

$\log_2 [\log_{\frac{1}{2}} (\log_3 x)] > 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (\log_3 x) > 1 \Rightarrow 0 < \log_3 x < \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 < x < \sqrt{3}$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \sqrt{3}\}$.

353. Resolva as inequações:

a) $\log_{\frac{1}{3}} (\log_2 x) < 0$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (\log_{\frac{1}{3}} x) \geqslant 0$

c) $\log_2 (\log_{\frac{1}{2}} x) \geqslant 1$

d) $\log_2 [\log_3 (\log_5 x)] > 0$

e) $\log_{\frac{1}{2}} [\log_3 (\log_{\frac{1}{2}} x)] < 0$

f) $\log_2 [\log_{\frac{1}{2}} (\log_3 x)] > 1$

354. Determine o conjunto solução da inequação $\log_{\frac{1}{3}} [\log_{\frac{1}{3}} x] \geqslant 0$.

355. Sendo $a > 1$, resolva a inequação $\log_a (\log_a x) < 0$.

356. Se $0 < a < 1$, resolva a inequação $\log_a (\log_{\frac{1}{a}} x) \leqslant 0$.

357. Resolva a inequação $\log_a [\log_{\frac{1}{a}} (\log_a x)] \geqslant 0$, para $a > 1$.

358. Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{a}} [\log_a (\log_a x)] \leqslant 0$, para $0 < a < 1$.

359. Resolva as inequações:

a) $\log_2 \{1 + \log_3 [\log_2 (x^2 - 3x + 2)]\} \geqslant 0$

b) $\log_{\frac{1}{3}} [\log_4 (x^2 - 5)] > 0$

c) $\log_2 \left(\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{x - 1} \right) < 0$

d) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_8 \dfrac{x^2 - 2x}{x - 3} \right) \leqslant 0$

360. Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \sqrt{\log_2 x}$

b) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$

c) $f(x) = \sqrt{\log_2 (\log_{\frac{1}{2}} x)}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{\log_{\frac{1}{2}} (\log_2 x)}$

e) $f(x) = \sqrt{\log_3 \dfrac{x^2 + 2x - 7}{x - 1}}$

f) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{x^2 - 1}}$

361. Determine o domínio da função f dada por $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} (x - 1)}$.

362. Resolva a inequação $\sqrt{\log_a \dfrac{3 - 2x}{1 - x}} < 1$.

363. Resolva as inequações:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(4x^2 - 9x + 5)} > 2$

b) $3^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 6x)} \leqslant \frac{1}{81}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]} < 1$

d) $(1{,}25)^{1 - \log_2^2 x} < (0{,}64)^{2 + \log_{\sqrt{2}} x}$

364. Resolva a inequação $x^{2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2} > \frac{1}{x}$.

365. Determine os valores de a para que a equação $x^2 - 4x + \log_2 a = 0$ admita raízes reais.

Solução

A equação admitirá raízes reais se o discriminante da equação não for negativo ($\Delta \geqslant 0$).

$$\Delta = 16 - 4 \cdot \log_2 a \geqslant 0 \Rightarrow \log_2 a \leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < a < \sqrt[4]{2}$$

Resposta: $0 < a < \sqrt[4]{2}$.

366. Determine os valores de a para os quais as raízes da equação são reais:

a) $x^2 - 2x - \log_2 a = 0$

b) $3x^2 - 6x + \log a = 0$

c) $x^2 - x \cdot \log_3 a + 4 = 0$

d) $x^2 - x \cdot \log_2 a + \log_2 a = 0$

367. Determine o valor de m para que a equação $x^2 - 2x - \log_{10} m = 0$ não tenha raízes reais.

368. Determine o valor de N para que a equação $x^2 - 2x + \log_{10} N = 0$ admita duas raízes de sinais contrários.

369. Determine o valor de t para que a equação $4^x - (\log_e t + 3)\, 2^x - \log_e t = 0$ admita duas raízes reais e distintas.

370. Determine a para que a equação $3x^2 - 5x + \log(2a^2 - 9a + 10) = 0$ admita raízes de sinais contrários.

371. Resolva as inequações:

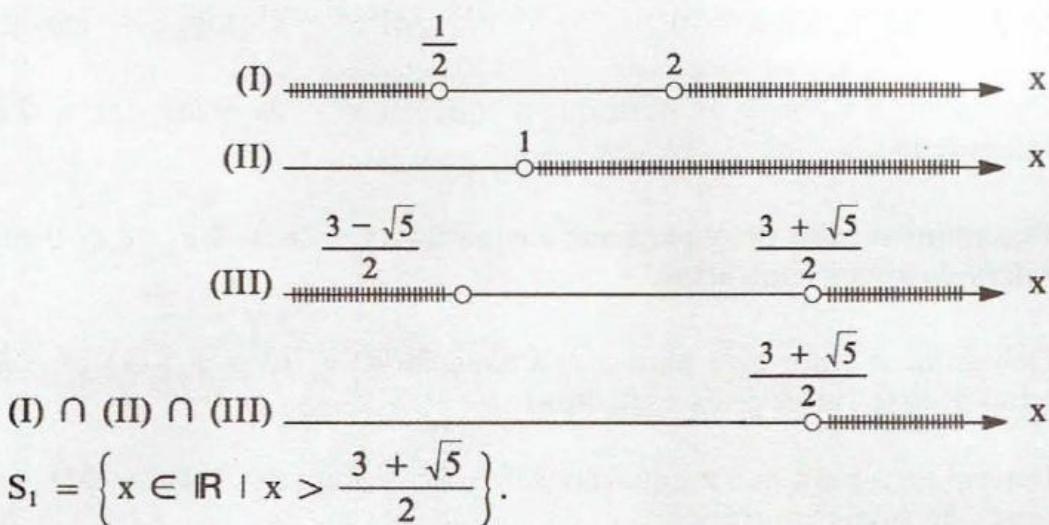
a) $(4 - x^2) \cdot \log_2(1 - x) \leqslant 0$

b) $(5x^2 + x - 6) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) \geqslant 0$

372. Resolva a inequação $x^{\frac{1}{\log x}} \cdot \log x < 1$.

373. Resolva a inequação $log_x\ (2x^2 - 5x + 2) > 1$.

Solução

Antes de resolvermos a inequação, devemos levantar a condição para a existência do logaritmo.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x^2-5x+2>0 \Rightarrow x<\frac{1}{2} \text{ ou } x>2 \\ \qquad\qquad e \\ 0 < x \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0<x<\frac{1}{2} \text{ ou } x>2 \quad \text{(I)}$$

Como a base x pode ser maior ou menor que 1, devemos examinar dois casos:

1º) Se $x > 1$ (II), temos:

$\log_x (2x^2 - 5x + 2) > 1 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 > x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 2 > 0 \Rightarrow x < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ou $x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ (III)

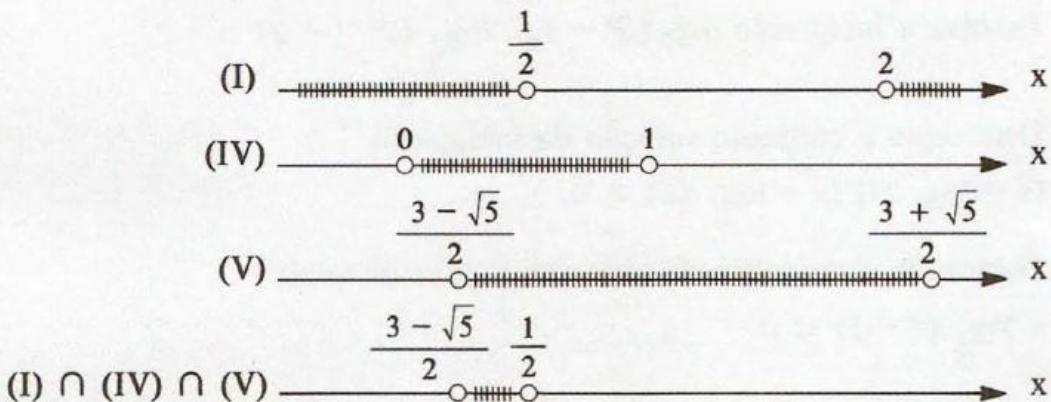
A solução neste caso é dada por:

(I) $\frac{1}{2}$, 2 — x

(II) 1 — x

(III) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ — x

(I) ∩ (II) ∩ (III) $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ — x

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right\}.$$

2º) Se $0 < x < 1$ (IV), temos:

$\log_x (2x^2 - 5x + 2) > 1 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 < x \Rightarrow 2x^2 - 6x + 2 < 0$

$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ (V)

A solução neste caso é dada por:

(I) (IV) (V) — retas reais com os pontos $\frac{1}{2}$, 2; 0, 1; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

(I) ∩ (IV) ∩ (V): $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1}{2}$

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2}\right\}.$$

A solução da inequação proposta é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

374. Resolva as inequações:

a) $\log_{x^2}(x+2) < 1$

b) $\log_{2x+3} x^2 < 1$

c) $\log_{x^2}(x^2 - 5x + 4) < 1$

d) $\log_x \frac{4x+5}{6-5x} < -1$

e) $\log_{(3x^2+1)} 2 < \frac{1}{2}$

f) $\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1$

g) $\log_{(x+6)}(x^2 - x - 2) \geqslant 1$

h) $\log_{\left(\frac{2x+5}{2}\right)} \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 0$

i) $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}} \left(\frac{x}{3}\right) > 0$

375. Resolva a inequação $log_x\,(2x - 1) \leqslant 2$.

376. Para que os valores de a e b se tem a desigualdade:

$\log_a(a^2b) > \log_b\left(\frac{1}{a^5}\right)$?

377. Resolva a inequação $log_2\,(x - 1) \cdot log_{\frac{1}{2}}\,(3x - 4) > 0$.

378. Resolva a inequação $x^{log_a x + 1} > a^2 x$ para $a > 1$.

379. Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1$.

380. Resolva a inequação $\log_2 (2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}} (2^{x+1} - 2) > -2$.

381. Determine o conjunto solução da inequação
$(x - \log_3 27)(x - \log_2 \sqrt{8}) < 0$.

382. Determine o conjunto de todos os x para os quais
$x \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) < 0$.

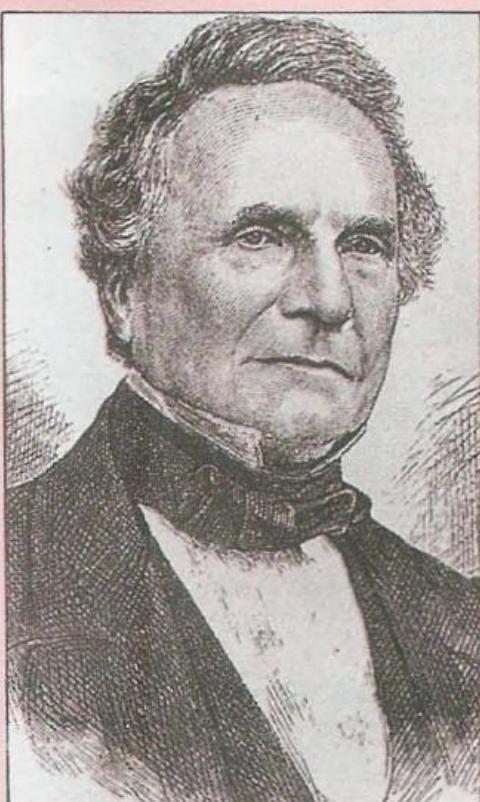
LEITURA

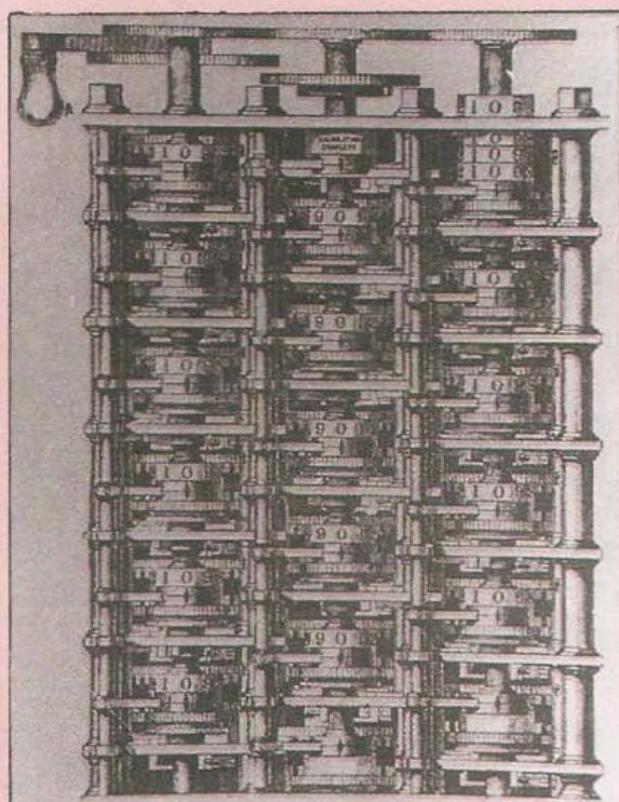
A Computação e o Sonho de Babbage

Hygino H. Domingues

O ato de contar com pedrinhas remonta às origens dos processos aritméticos. Daí para a invenção do ábaco foi uma evolução natural, embora, com certeza, bastante lenta. Esse primeiro instrumento mecânico de computação teve uma importância muito grande e duradoura: ainda no século XVI, não raro os textos de aritmética traziam instruções para calcular tanto com algarismos indo-arábicos como com o ábaco.

O século XVII, na esteira da revolução científica que o caracterizou, deu contribuições notáveis também ao campo da computação. John Napier (1550-1617), o criador dos logaritmos, num trabalho de 1617 intitulado *Rabdologia*, descreveu o primeiro instrumento de cálculo a ser inventado após o ábaco: as chamadas "barras de Napier", um dispositivo mecânico que reduzia o trabalho de multiplicar à realização de adições. O sucesso dessas barras foi tanto que de início elas trouxeram mais notoriedade a seu inventor que os próprios logaritmos. Pouco depois, em 1622, surgiu a primeira versão das réguas de cálculo, uma invenção do matemático inglês William Oughtred (1579-1660), desenvolvendo uma idéia de seu conterrâneo Edmund Gunter (1581-1626).

E mesmo o protótipo mais legítimo das atuais máquinas de calcular é fruto do século XVII. Trata-se da Pascaline, planejada pelo matemático e pensador francês Blaise Pascal (1623-1662), quando tinha 18 anos de idade, para aliviar seu pai, um coletor de impostos, dos exaustivos cálculos a que sua função o obrigava diariamente. Basicamente a Pascaline era um engenho mecânico capaz de somar e subtrair. Pascal chegou a construir cerca de 50 dessas máquinas, mas esse número não correspondeu ao sucesso comercial esperado por ele.

Na segunda metade do século XVII, o matemático e filósofo alemão Gottfried W. Leibniz (1646-1716), preocupado com as horas de trabalho gastas por matemáticos e astrônomos em cálculos árduos e demorados, o que considerava indigno do saber desses homens, visto que qualquer pessoa poderia realizá-los caso se usassem máquinas, ideou uma máquina de calcular capaz de realizar as quatro operações básicas. Pronta em 1694, seu componente aditivo era essencialmente idêntico ao da máquina de Pascal, mas, mediante um carro móvel e uma manivela, conseguia acelerar as adições repetidas envolvidas nos processos de multiplicação e divisão. As calculadoras mecânicas de mesa, ainda em uso, cujos primeiros modelos remontam ao início do século, derivam da máquina de Leibniz.

É interessante registrar que entre as realizações matemáticas de Leibniz figura a primeira descrição do sistema de numeração binário (1703). A inspiração para esse trabalho veio-lhe em parte da leitura de um antigo texto chinês que procurava explicar a complexidade do universo em termos de uma série de dualidades — por exemplo, luz e treva, macho e fêmea, bem e mal. Será que Leibniz, não obstante seu pioneirismo na busca de uma linguagem universal para as ciências, podia imaginar que a idéia subjacente ao sistema binário seria uma das molas propulsoras da computação do século XX, pela facilidade relativamente bem maior de se representarem 2 símbolos nos circuitos do computador em vez de 10?

A primeira proposta de uma máquina de calcular automática só ocorreria no século XIX. Seu autor, o inglês Charles Babbage (1792-1871), ocupa uma posição singular na história da computação. Filho de um banqueiro, do qual posteriormente herdou fortuna considerável, Babbage foi educado por professores particulares, devido à sua saúde frágil, até iniciar seus estudos superiores no Trinity College, Cambridge, em 1810. Mas, acreditando que iria ser "apenas" o terceiro de sua turma, transferiu-se no terceiro ano para Peterhouse, onde, efetivamente, veio a se graduar em primeiro lugar. Não fosse a inquietação que o dominava, provocada especialmente pelas máquinas matemáticas com que sonhava, a vida de Babbage teria transcorrido provavelmente sem contratempos significativos. Mas ao fim de seus dias

ele, que fora um otimista em sua juventude, tornou-se um homem amargo devido às frustrações decorrentes de sua luta contra tarefas muitas vezes acima das possibilidades de sua época.

Em 1822, num artigo científico, Babbage expôs pela primeira vez a idéia de sua "máquina diferencial", um engenho que seria capaz de calcular e imprimir extensas tábuas matemáticas. Em 1839, tendo obtido uma subvenção do governo britânico de 17 000 libras, renunciou a uma cadeira de matemática que regia em Cambridge e pôs-se a trabalhar na construção de um modelo em tamanho grande. Em três anos esgotou todos os recursos colocados à sua disposição e gastou ainda cerca de 6 000 libras de seu bolso, sem concretizar o projeto, por fim abandonado. Que este era viável prova-o o fato de que dois suecos, George e Edward Scheutz, inspirados num artigo de Babbage, conseguiram construir uma máquina diferencial de menor porte, mas muito eficiente, completada em 1853.

Charles Babbage (1792-1871).

Detalhe da "máquina diferencial", idealizada por Babbage.

Dentre os subprodutos desse período, o mais importante sem dúvida foi a idéia da "máquina analítica", de concepção mais simples, porém mais potente e mais rápida. Obedecendo às instruções fornecidas pelo operador através de cartões perfurados, teria condições de executar um espectro amplo de tarefas de cálculo. Embora sem subven- ►

ções, apesar de sua pertinaz insistência junto aos órgãos públicos, Babbage trabalhou vários anos nessa nova idéia, mas também não conseguiu concretizá-la. Em 1906 seu filho H. P. Babbage, depois de completar parcialmente a máquina, obteve por meio dela a expressão do número π com 29 algarismos — um feito modesto, mas que revelava uma centelha a ser avivada.

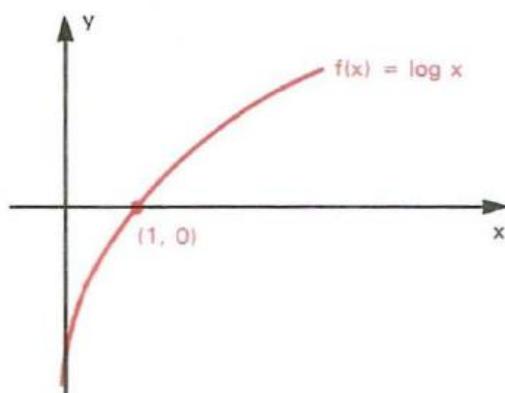
Somente neste século, em 1944, ficaria pronto o primeiro computador programável — o Harvard Mark I Calculator — inspirado na máquina de Babbage. Com cerca de 15 m de comprimento e 2,5 m de altura, o Mark I continha nada menos que 750 000 componentes ligados por 80 400 m de fio. Sua complexidade técnica justificava as palavras do Prof. Howard H. Aiken, seu construtor, segundo as quais Babbage fracassara não devido ao seu projeto, mas "porque lhe faltavam máquinas operatrizes, circuitos elétricos e ligas metálicas" tão essenciais nos modernos computadores.

Se para alguns de seus contemporâneos a máquina analítica de Babbage pareceu uma loucura, hoje pode-se dizer que foi um grande sonho que se tornou a realidade tecnológica de maior alcance do mundo moderno.

CAPÍTULO VII

Logaritmos Decimais

I. Introdução

Após o estudo da teoria dos logaritmos, veremos agora algumas aplicações aos cálculos numéricos.

Os logaritmos, quando da sua invenção, foram saudados alegremente por Kepler (Johann Kepler, 1571-1630, astrônomo alemão), pois aumentavam enormemente a capacidade de computação dos astrônomos.

Notemos que, com as propriedades operatórias dos logaritmos, podemos transformar uma multiplicação em uma soma, uma divisão em uma subtração e uma potenciação em uma multiplicação, isto é, com o emprego da teoria de logaritmos podemos transformar uma operação em outra mais simples de ser realizada.

Dentre os diversos sistemas de logaritmos estudaremos com particular interesse o sistema de logaritmos de base *10*.

Lembremos as principais propriedades da função logarítmica de base *10*:

1) $\log 1 = 0$
2) $\log 10 = 1$
3) $x > 1 \Rightarrow \log x > 0$
   $0 < x < 1 \Rightarrow \log x < 0$

II. Característica e mantissa

75. Qualquer que seja o número real positivo x que consideremos, estará necessariamente compreendido entre duas potências de 10 com expoentes inteiros consecutivos.

Exemplos

1º) $x = 0{,}04 \Rightarrow 10^{-2} < 0{,}04 < 10^{-1}$
2º) $x = 0{,}351 \Rightarrow 10^{-1} < 0{,}351 < 10^{0}$
3º) $x = 3{,}72 \Rightarrow 10^{0} < 3{,}72 < 10^{1}$
4º) $x = 45{,}7 \Rightarrow 10^{1} < 45{,}7 < 10^{2}$
5º) $x = 573 \Rightarrow 10^{2} < 573 < 10^{3}$

Assim, dado $x > 0$, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$10^c \leqslant x < 10^{c+1} \Rightarrow \log 10^c \leqslant \log x < \log 10^{c+1} \Rightarrow c \leqslant \log x < c + 1.$$

Podemos afirmar que

$$\log x = c + m \text{ em que } c \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leqslant m < 1$$

isto é, o logaritmo decimal de x é a soma de um número inteiro c com um número decimal m não negativo e menor que 1.

O número inteiro c é por definição a *característica* do logaritmo de x e o número decimal m ($0 \leqslant m < 1$) é por definição a *mantissa* do logaritmo decimal de x.

III. Regras da característica

A característica do logaritmo decimal de um número x real positivo será calculada por uma das duas regras seguintes.

76. *Regra I ($x > 1$)*

A característica do logaritmo decimal de um número $x > 1$ é igual ao número de algarismos de sua parte inteira, menos 1.

Justificação

Seja $x > 1$ e x tem $(n + 1)$ algarismos na sua parte inteira; então temos:

$$10^n \leqslant x < 10^{n+1} \Rightarrow \log 10^n \leqslant \log x < \log 10^{n+1} \Rightarrow n \leqslant \log x < n + 1$$

isto é, a característica de $\log x$ é n.

Exemplos

logaritmo	característica
log 2,3	c = 0
log 31,421	c = 1
log 204	c = 2
log 6542,3	c = 3

77. *Regra II* $(0 < x < 1)$

A característica do logaritmo decimal de um número $0 < x < 1$ é o oposto da quantidade de zeros que precedem o primeiro algarismo significativo.

Justificação

Seja $0 < x < 1$ e x tem n algarismos zeros precedendo o primeiro algarismo não nulo; temos, então:

$$10^{-n} \leqslant x < 10^{-n+1} \Rightarrow \log 10^{-n} \leqslant \log x < \log 10^{-n+1} \Rightarrow -n \leqslant \log x < -n + 1$$

isto é, a característica do $\log x$ é $-n$.

Exemplos

logaritmo	característica
log 0,2	c = −1
log 0,035	c = −2
log 0,00405	c = −3
log 0,00053	c = −4

IV. Mantissa

A mantissa é obtida nas tábuas (tabelas) de logaritmos.

Em geral, a mantissa é um número irracional e por esse motivo as tábuas de logaritmos são tabelas que fornecem os valores aproximados dos logaritmos dos números inteiros, geralmente de *1* a *10 000*.

Nas páginas 134 e 135 temos uma tabela de mantissas dos logaritmos dos números inteiros de *100* a *999*.

Ao procurarmos a mantissa do logaritmo decimal de x, devemos lembrar a seguinte propriedade.

78. *Propriedade da mantissa*

A mantissa do logaritmo decimal de x não se altera se multiplicarmos x por uma potência de *10* com expoente inteiro.

Demonstração

Para demonstrarmos essa propriedade, mostremos que se $p \in \mathbb{Z}$ então a diferença

$$(\log (x \cdot 10^p) - \log x) \in \mathbb{Z}$$

De fato:

$$\log (10^p \cdot x) - \log x = \log \left(\frac{10^p \cdot x}{x} \right) = \log 10^p = p \in \mathbb{Z}$$

Uma conseqüência importante é:

> "Os logaritmos de dois números cujas representações decimais diferem apenas pela posição da vírgula têm mantissas iguais."

Assim, os logaritmos decimais dos números *2*, *200*, *2 000*, *0,2*, *0,002* têm todos a mesma mantissa *0,3010*, mas as características são respectivamente *0*, *2*, *3*, *−1*, *−3*.

MANTISSAS										
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

MANTISSAS										
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9150	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

V. Exemplos de aplicações da tábua de logaritmos

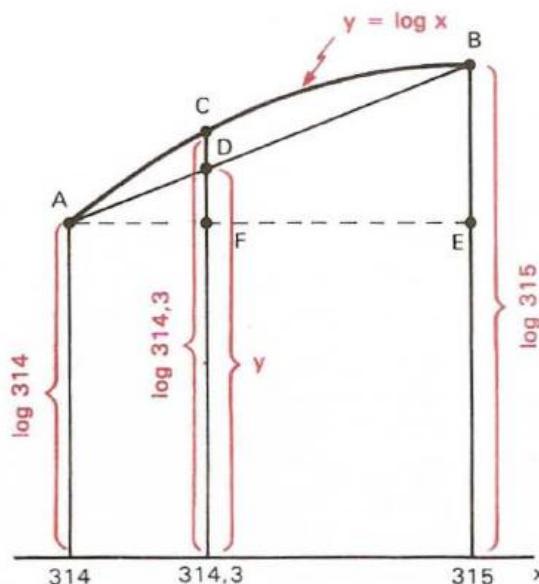
1º) Calcular *log 23,4.*

A característica é *1* e a mantissa é *0,3692*, que é a mesma do número *234*. Temos, então:

$$\log 23{,}4 = 1{,}3692$$

2º) Calcular *log 0,042.*

A característica é -2 e a mantissa é *0,6232*, que é a mesma de *420*. Temos, então:

$$\log 0{,}042 = -2 + 0{,}6232 = -1{,}3768$$

Entretanto, é usual escrevermos $-2 + 0{,}6232$ sob a forma $\overline{2}{,}6232$, em que figura explicitamente a mantissa do logaritmo e a característica -2 é substituída pela notação $\overline{2}$.

Dizemos que $\overline{2}{,}6232$ é a *forma mista* ou *preparada* do *log 0,042* e que $-1{,}3768$ é a *forma negativa* de *log 0,042*.

3º) Calcular *log 314,2.*

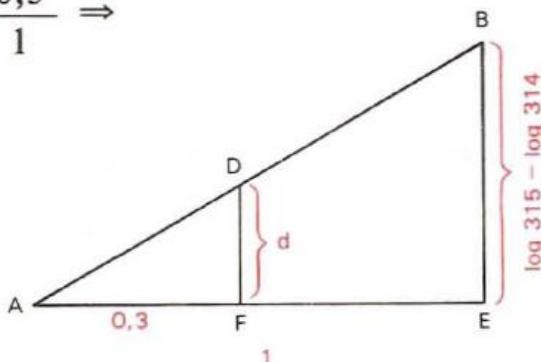
Para calcularmos o *log 314,2*, consideremos parte da representação cartesiana da função $f(x) = \log x$.

x	y = log x
$x_1 = 314$	$y_1 = \log 314 = 2{,}4969$
$x_3 = 314{,}3$	$y_3 = \log 314{,}3 = (?)$
$x_2 = 315$	$y_2 = \log 315 = 2{,}4983$

A variação da função logarítmica não é linear, mas podemos aceitar como uma boa aproximação de *log 314,3* a ordenada *y* do ponto *D* sobre a reta *AB*.

Para determinarmos o valor de *y*, consideremos os triângulos *AEB* e *AFD*.

Como os triângulos *AFD* e *AEB* são semelhantes, temos:

$$\frac{DF}{BE} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow \frac{d}{\log 315 - \log 314} = \frac{0,3}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = 0,3 \cdot (\log 315 - \log 314) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = 0,3 \cdot (2,4983 - 2,4969) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \cong 0,0004$$

Portanto,

$$\log 314,3 = \log 314 + d$$

ou seja,

$$\log 314,3 = 2,4969 + 0,0004 = 2,4973$$

O processo pelo qual calculamos o *log 314,3* é chamado *interpolação linear*.

4º) Calcular *antilog 1,7952*.

Fazendo x = *antilog 1,7952*, temos:

$$\log x = 1,7952$$

Com a mantissa *0,7952* encontramos na tábua o número *624*, mas, como a característica do *log x* é *1*, então temos:

$$x = 62,4$$

5º) Calcular *antilog −1,3716*.

Fazendo x = *antilog −1,3716*, temos:

$$\log x = -1,3716$$

Devemos transformar o logaritmo na forma negativa para a forma mista ou preparada, pois na tábua a mantissa é sempre positiva.

Essa transformação é obtida adicionando *1* à sua parte decimal e subtraindo *1* da parte inteira, o que evidentemente não altera o número negativo.

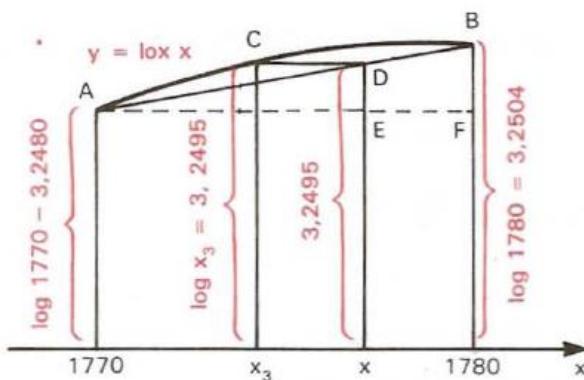
Assim, temos:

$$-1,3716 = -1 - 0,3716 = -1 - 1 + 1 - 0,3716 = -2 + 0,6284 = \bar{2},6284$$

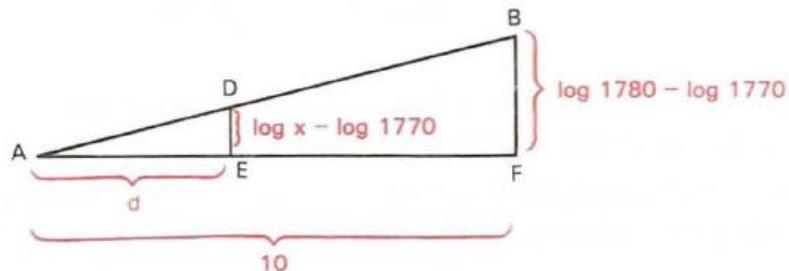
e

$$\log x = -1,3716 = \bar{2},6284$$

Com a mantissa *0,6284* encontramos o número *425*, mas, como a característica do *log x* é *−2*, temos:

$$x = 0,0425$$

6º) Calcular *antilog 3,2495*.

x = antilog 3,2495 ⇒ log x = 3,2495.

A mantissa *0,2495* não aparece na tábua, porém está compreendida entre as mantissas *0,2480* e *0,2504*.

Considerando novamente a função $f(x) = \log x$, temos:

x	y = log x
$x_1 = 1\,770$	$y_1 = \log 1\,770 = 3{,}2480$
$x_3 = ?$	$y_3 = \log x_3 = 3{,}2495$
$x_2 = 1\,780$	$y_2 = \log 1\,780 = 3{,}2504$

Lembrando: a variação da função logarítmica não é linear, mas podemos aceitar como uma boa aproximação de *antilog 3,2495* a abscissa *x* do ponto *D* sobre a reta *AB*.

Para determinarmos o valor de x, consideremos os triângulos *AED* e *AFB*.

Como os triângulos *AED* e *AFB* são semelhantes, temos:

$$\frac{AE}{AF} = \frac{DE}{BF} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{10} = \frac{\log x - \log 1\,770}{\log 1\,780 - \log 1\,770} \Rightarrow d = 10 \cdot \frac{0{,}0015}{0{,}0024} \Rightarrow d \cong 6{,}3$$

Portanto,

$x = 1\,770 + d = 1\,770 + 6{,}3 \Rightarrow x = 1\,776{,}3.$

EXERCÍCIOS

383. Determine as características, no sistema decimal, de

log 7; log 0,032; log 10^5 e log 0,00010.

384. Calcule:

a) log 3 210
b) log 25,4
c) log 5,72
d) log 0,74
e) log 0,00357

385. Calcule:

a) antilog 3,8768
b) antilog 1,8035
c) antilog 0,9175
d) antilog $\overline{1},5145$
e) antilog $\overline{3},6693$
f) antilog $\overline{2},1271$

386. Calcule:

a) antilog −2,0899
b) antilog −3,2147
c) antilog −0,4473
d) antilog −1,6517

387. Calcule:

a) log 3 275
b) log 23,72
c) log 0,04576
d) log 0,8358
e) log e

388. Calcule:

a) antilog 1,3552
b) antilog 0,4357
c) antilog $\overline{1},7383$
d) antilog −1,6336

389. Ache o maior valor de n para o qual $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais verificando a igualdade

$$\begin{aligned} \log 12\,345 &= a_1 \\ \log a_1 &= a_2 \\ \log a_2 &= a_3 \\ &\vdots \\ \log a_{n-1} &= a_n \end{aligned}$$

390. Calcule $log_2\ 3$.

Solução

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,4771}{0,3010} = 1,585$$

391. Calcule:

a) $\log_3 2$ b) $\log_2 5$ c) $\log_5 3$ d) $\log_5 6$ e) $\log_6 4$

392. Determine a característica do logaritmo de *800* no sistema de base *3*.

393. Determine o número de algarismos da potência 50^{50}, considerando $log\ 2 = 0,301$.

394. Resolva as equações (aproximações em centésimos):

a) $5^x = 100$
b) $3^x = 20$
c) $2^x = 30$
d) $7^x = 0,3$
e) $e^x = 50$

395. Resolva as equações (aproximações em centésimos):

a) $2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 15 = 0$
b) $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 4 = 0$
c) $10^{2x} - 7 \cdot 10^x + 10 = 0$
d) $e^{2x} - 5 \cdot e^x + 6 = 0$

396. Sabendo que $log_{10}\ 2 = 0,30$ e $log_{10}\ 3 = 0,48$, resolva a equação $3^x \cdot 2^{3x-1} = 6^{2x+1}$.

397. Calcule com aproximação de milésimos o valor de $\sqrt[5]{2}$.

Solução

Seja

$$x = \sqrt[5]{2} \Rightarrow \log x = \log \sqrt[5]{2} \Rightarrow \log x = \frac{1}{5} \log 2 \Rightarrow$$

$$\log x = \frac{1}{5} \times 0,3010 \Rightarrow \log x = 0,0602$$

Por interpolação linear, obtemos: $x = 1,149$.

398. Calcule, com aproximação de milésimos, o valor de:

a) $\sqrt[6]{3}$ b) $\sqrt[4]{10}$ c) $2^{3,4}$ d) $5^{2,3}$

399. O volume de uma esfera é dado por $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, em que R é o raio da esfera. Calcule o raio da esfera de volume $20\ cm^3$.

400. Calcule o valor de $A = \sqrt[5]{(3,4)^3 \cdot (1,73)^2}$ com aproximação de centésimos.

401. O valor C de um capital (empregado a uma taxa i de juros capitalizados periodicamente ao fim do período), após t períodos, é dado por $C = C_0 \cdot (1 + i)^t$, em que C_0 é o valor inicial.
Qual é o tempo necessário para que um capital empregado à taxa de 2% ao mês, com juros capitalizados mensalmente, dobre de valor?

Solução

Sendo $C(t) = 2 \cdot C_0$ e $i = 0,02$, temos: $2C_0 = C_0 (1 + 0,02)^t \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 = (1,02)^t$.

Tomando logaritmos decimais, temos:

$$\log (1,02)^t = \log 2 \Rightarrow t \cdot \log (1,02) = \log 2 \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1,02} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{0,3010}{0,0086} \Rightarrow t = 35 \text{ meses.}$$

Resposta: *35* meses.

402. Determine qual é o tempo necessário para que um capital empregado à taxa de 3% ao mês, com juros capitalizados mensalmente, triplique de valor.

403. Determine qual é o tempo necessário para que um capital empregado à taxa de $10,5\%$ ao trimestre, com jutos capitalizados ao fim de cada trimestre, dobre de valor.

404. Qual é o montante de *R$ 1 000 000,00* empregados à taxa de 3% ao mês, capitalizados mensalmente, ao fim de *18* meses?

405. Qual é o montante de *R$500 000,00* empregados a uma taxa de 4% ao trimestre, capitalizados trimestralmente, ao fim de *12* anos?

406. Uma certa cultura de bactérias cresce quando a lei $N(t) = 2\ 000 \cdot 10^{\frac{t}{36}}$, em que $N(t)$ é o número de bactérias após t horas. Quantas bactérias haverá após *3* horas?

407. A desintegração de certo material radioativo é dada por: $Q(t) = Q_0 \cdot 10^{-kt}$. Se $Q(20) = 400$ gramas e $Q_0 = 500$ gramas, então calcule k.

Respostas dos Exercícios

Capítulo I

2. a) -27 b) -2 c) 81 d) 1 e) $\frac{8}{27}$ f) $\frac{1}{81}$ g) $\frac{1}{8}$ h) 1 i) -4 j) $\frac{27}{8}$ k) 1 l) -1 m) 0 n) 1 o) -1 p) 1

3. 2

4. a) F b) F c) F d) F e) V f) V g) V h) V

6. a) $a^{13} \cdot b^{12}$ b) $a^{10} \cdot b^{2}$ c) $a^{18} \cdot b^{12}$ d) $a^{10} \cdot b^{10}$ e) $a^{5} \cdot b^{14}$

7. $a = 0$ ou $b = 0$

8. 3 150

9. 6

10. a) $-\frac{16}{17}$ b) $\frac{40}{41}$ c) 2

11. a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{9}$ g) $-\frac{1}{25}$ h) 9 i) $\frac{3}{2}$ j) $\frac{-8}{27}$ k) $\frac{-25}{4}$ l) $\frac{27}{8}$ m) 100 n) 64 o) -8 p) $\frac{16}{9}$ q) 8 r) $\frac{1}{25}$ s) -27 t) 0,0001

12. $x + y$

13. a) V b) F c) F d) F e) F f) V g) V h) F i) V j) V

15. a) $a^{13} \cdot b^{-12}$ b) $a^{-2}\, b^{9}$ c) $a^{-12} \cdot b^{18}$ d) $a^{15} \cdot b^{-18}$ e) $a^{-6}\, b^{4}$ f) $a^{-1} \cdot b^{-1}$ g) $\frac{a + b}{ab}$

16. a) a^{5} b) a^{n+4} c) a^{2n+4} d) $\frac{a - 1}{a}$

17. a) V b) F c) V d) V e) V f) V

18. a) V b) F c) V d) V e) V

20. a) $\begin{cases} x + 2 & \text{se } x > -2 \\ 0 & \text{se } x = -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3 & \text{se } x > \dfrac{3}{2} \\ 0 & \text{se } x = \dfrac{3}{2} \\ 3 - 2x & \text{se } x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3 & \text{se } x > 3 \\ 0 & \text{se } x = 3 \\ 3 - x & \text{se } x < 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x > -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{se } x = -\dfrac{1}{2} \\ -2x - 1 & \text{se } x < -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

22. a) 12 b) 18 c) 9 d) 14 e) 5 f) $3\sqrt{2}$ g) $8\sqrt{2}$ h) $2\sqrt[3]{9}$ i) $4\sqrt[4]{2}$

23. a) $7\sqrt{2}$ b) $49\sqrt{3}$ c) $7\sqrt{5} - 5\sqrt{6}$ d) $22\sqrt{5} + 11\sqrt{2}$ e) 0 f) $2\sqrt[3]{3}$ g) 0

24. a) $9x\sqrt{x},\ x \geqslant 0$ b) $3x|y|\sqrt{5x},\ x \geqslant 0$ c) $2x^2y^2\sqrt{3y},\ y \geqslant 0$ d) $2|x|\sqrt{2}$

26. a) $\sqrt[30]{2^{15}},\ \sqrt[30]{5^{10}},\ \sqrt[30]{3^6}$

b) $\sqrt[12]{3^6},\ \sqrt[12]{2^8},\ \sqrt[12]{2^3},\ \sqrt[12]{5^2}$

c) $\sqrt[12]{2^8},\ \sqrt[12]{3^6},\ \sqrt[12]{5^9}$

d) $\sqrt[30]{3^{20}},\ \sqrt[30]{2^{45}},\ \sqrt[30]{5^{24}},\ \sqrt[30]{2^{25}}$

28. a) 6 b) 30 c) 6 d) $2\sqrt{3}$ e) $6\sqrt{2}$ f) $2\sqrt[3]{3}$ g) $\sqrt{2}$ h) 2 i) $\sqrt[3]{5}$ j) $\sqrt[6]{2^5}$ k) $\sqrt[12]{3^4 \cdot 2^3 \cdot 5^6}$ l) $\sqrt[6]{\dfrac{3^2}{2^3}}$ m) $\sqrt[6]{2}$ n) $\sqrt[12]{2^7}$ o) $\sqrt[12]{\dfrac{2^4}{3^2 \cdot 5^3}}$

30. a) $-8\sqrt{15}$ b) 7 c) $28 - \sqrt{2}$ d) $16 + 4\sqrt{5}$ e) $-10 - \sqrt{2}$ f) $18 + 11\sqrt{6}$ g) -46 h) $11 + 6\sqrt{2}$ i) $21 - 8\sqrt{5}$ j) $67 + 12\sqrt{7}$ k) $17 - 12\sqrt{2}$

31. a) $2\sqrt[6]{2}$ b) $14\sqrt[4]{3}$ c) $20\sqrt[4]{2^3}$ d) $3 + \sqrt[6]{18}$

32. a) 1 b) 5 c) 1 d) 2

33. a) $a^2 - b$ b) $2 + \sqrt{x} + \sqrt{y}$ c) $(a + b)^2$ d) 1 e) y

34. a) 2 b) $\sqrt[3]{4}$ c) $\sqrt[4]{a^3}$

36. a) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ c) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ d) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ f) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$ g) $\dfrac{2\sqrt[3]{9}}{3}$ h) $\dfrac{3\sqrt[4]{8}}{2}$ i) $2 - \sqrt{3}$ j) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ k) $6 - 4\sqrt{2}$ l) $\dfrac{30 + 18\sqrt{2}}{7}$ m) $\dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{15}$ n) $4\sqrt{5} + 6\sqrt{2}$ o) $\dfrac{4 + 3\sqrt{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{15}}{22}$ p) $\dfrac{30 - 5\sqrt{5} + 35\sqrt{2} + 20\sqrt{10}}{31}$ q) $\dfrac{6 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{4}$ r) $1 + \sqrt[3]{3}$

37. $1 + \sqrt[3]{2}$

38. a) 4
b) $\sqrt{2}$
c) $\frac{9 + \sqrt{15}}{6}$
d) 2

39. $4x\sqrt{x^2 - 1}$

40. $a + b$

43. $x = 2$

44. $-22 - 21\sqrt{7}$

45. a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{2}{3}}$ c) $3^{\frac{3}{4}}$ d) $2^{\frac{1}{4}}$ e) $5^{\frac{1}{12}}$ f) $2^{\frac{4}{3}}$ g) $2^{-\frac{1}{2}}$ h) $3^{-\frac{2}{3}}$ i) $2^{-\frac{3}{2}}$

46. a) 2 b) $\frac{1}{8}$ c) 2 d) $\frac{3}{2}$ e) 2 f) $\frac{1}{9}$ g) $\frac{1}{8}$ h) $\frac{10}{9}$ i) 10

48. a) 27 b) 16 c) 2 d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{1}{3}$ f) 1024 g) 2 h) 4 i) $\frac{1}{16}$ j) $\frac{1}{49}$ k) 81 l) 36

49. a) $2^{\frac{19}{15}}$ b) $3^{\frac{11}{30}}$ c) $5^{\frac{14}{15}}$ d) $3^{-\frac{61}{120}}$ e) $3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{1}{2}}$ f) 70 g) 6

50. 0,2

51. 30

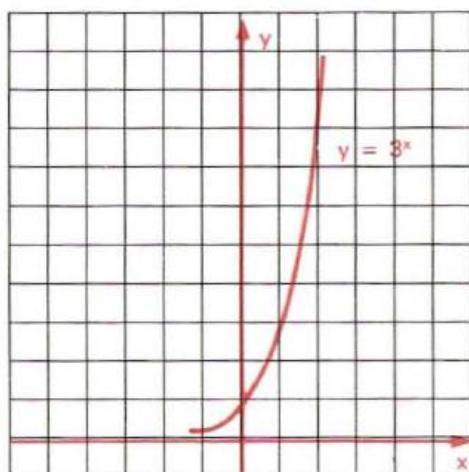
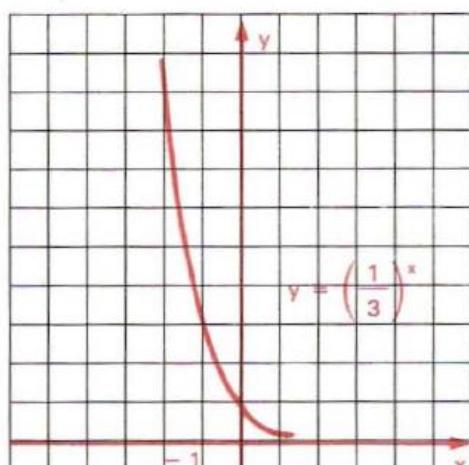
52. $\frac{5}{2}$

53. a) a b) $a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$ c) $a^2 + 2$ d) -1 e) $\frac{a + b}{|a - b|}$ f) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

55. a) 3 b) $2\sqrt[3]{6}$ c) $4^{-\sqrt{6}}$ d) 3 e) $2^{1 - 3\sqrt{3}}$ f) 1 g) $5^{9 - \sqrt{6}}$ h) 2^4 i) 2^{15}

56. $\frac{7}{8}$

57. 6^n

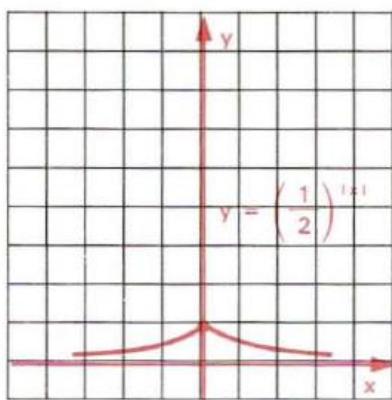
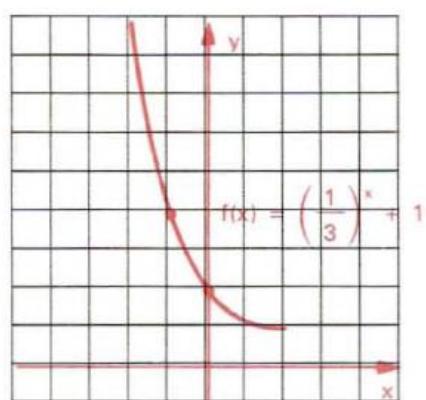
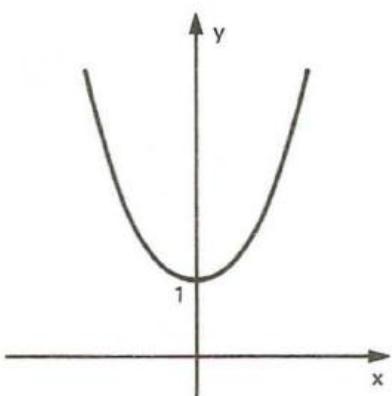
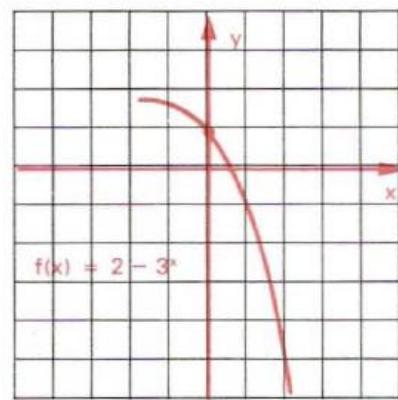
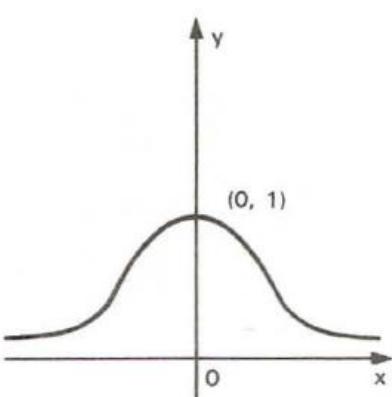
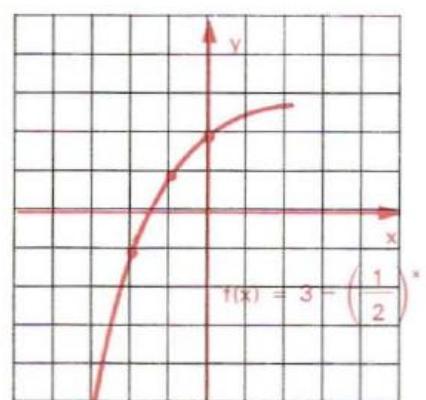
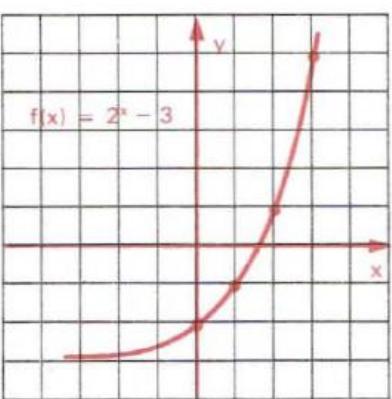
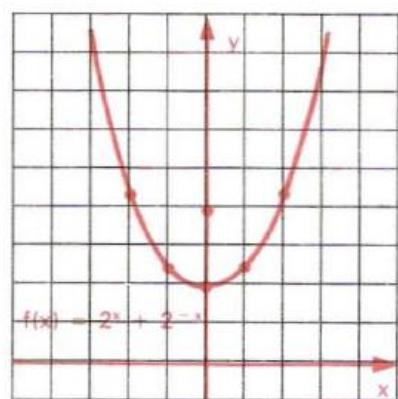
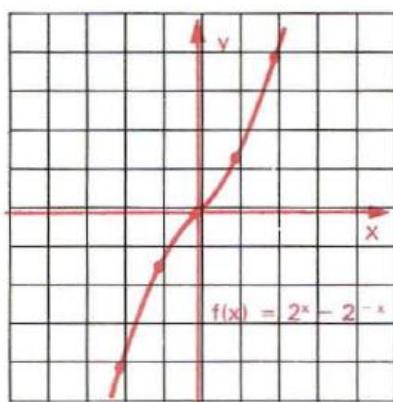
58. 1

Capítulo II

59. $\frac{1}{16}$

60. a)

b)

c)

d)
y = 10^x
x
y
e)
y = 10^-x
x
y
f)
y = (1/e)^x
x
y
62. a)
y = 2^(1-x)
x
y
b)
y = 3^((x+1)/2)
x
y
c)
y^(2|x|)
x
y
d)
y = (1/2)^(2x+1)
x
y

e)

b)

63.

c)

64.

d)

66. a)

67. a)

b)

d)

a)

b)

c)

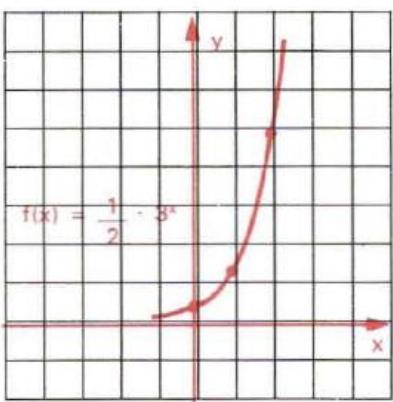
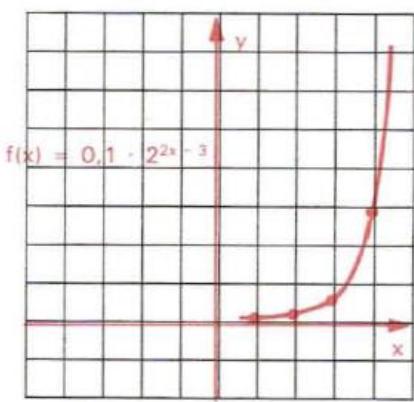
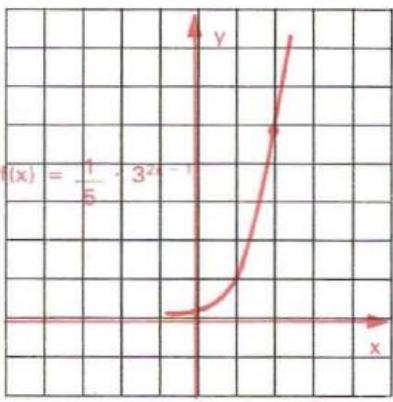
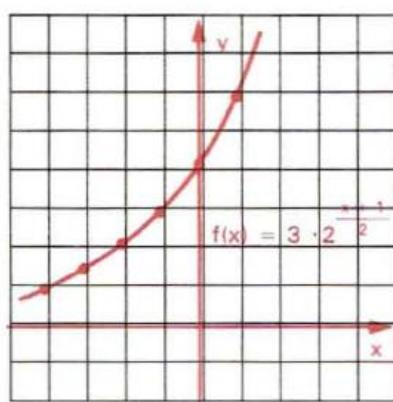
71.

a) $S = \{7\}$

b) $S = \{5\}$

c) $S = \{-4\}$

d) $S = \{-3\}$

e) $S = \{9\}$

f) $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$

g) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

h) $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

i) $S = \left\{\frac{-2}{3}\right\}$

j) $S = \left\{\frac{-15}{4}\right\}$

k) $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

l) $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

m) $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

n) $S = \{-2\}$

72.

a) $S = \{2\}$

b) $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

c) $S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

d) $S = \{5, -4\}$

e) $S = \{\sqrt{6} - 1, -\sqrt{6} - 1\}$

f) $S = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

g) $S = \left\{\frac{1}{12}\right\}$

h) $S = \{10\}$

i) $S = \left\{-\frac{5}{7}\right\}$

j) $S = \left\{\frac{5}{7}\right\}$

k) $S = \left\{-\frac{11}{16}\right\}$

l) $S = \left\{2, -\frac{1}{2}\right\}$

m) $S = \left\{3, \frac{1}{3}\right\}$

n) $S = \left\{2, -\frac{1}{3}\right\}$

73. $S = \{-6, 2\}$

74. $S = \{3, -5\}$

76. a) $S = \{-5, 1\}$
b) $S = \{3, -2\}$
c) $S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$
d) $S = \left\{-\frac{19}{8}\right\}$
e) $S = \{5\}$
f) $S = \left\{\frac{1}{7}\right\}$
g) $S = \{6, -2\}$
h) $S = \left\{\frac{3}{14}\right\}$
i) $S = \varnothing$
j) $S = \{2\}$

77. $S = \{2, 3\}$

79. a) $S = \{3\}$
b) $S = \{3\}$
c) $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$
d) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
e) $S = \{1\}$
f) $S = \{1\}$

81. a) $S = \{1\}$
b) $S = \{2\}$
c) $S = \{2, 4\}$
d) $S = \{0, 2\}$
e) $S = \{0\}$
f) $S = \varnothing$
g) $S = \{3\}$
h) $S = \{0, 1\}$
i) $S = \{3, -1\}$
j) $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

82. $S = \{9\}$

83. $x_1 \cdot x_2 = -2$

84. a) $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$
b) $S = \{2\}$
c) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

85. $S = \left\{1, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right\}$

86. Uma solução para cada $k \in \mathbb{R}$;
$2^x = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$

87. $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

88. $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

89. $S = \{1\}$

90. $S = \{0, 2\}$

92. a) $S = \left\{1, \frac{2}{3}\right\}$
b) $S = \{1\}$
c) $S = \{1, \sqrt{2}\}$
d) $S = \{1, 3, 4\}$
e) $S = \{1, 4\}$

93. a) $S = \{1\}$
b) $S = \{0, 1\}$
c) $S = \left\{0, 1, \frac{3}{2}\right\}$
d) $S = \left\{0, 1, 2, \frac{1}{2}\right\}$
e) $S = \{1, 4\}$

94. $S = \left\{0, 1, 2, -\frac{1}{2}\right\}$

95. $S = \{1, 2\}$

96. 2 soluções

97. $S = \{1, 2\}$

99. a) $S = \{0\}$ b) $S = \{-2\}$

100. a) $S = \{(3, 4)\}$
b) $S = \{(2, 3), (-3, 8)\}$
c) $S = \{(5, 3)\}$
d) $S = \{(4, \sqrt{2}), (4, -\sqrt{2})\}$

101. $x - y = -2$

102. $xy = 6$

103. $S = \{(1,6), (2, 7), (3, 8)\}$

104. a) $S = \left\{(1, 1), (3^{-\frac{1}{3}}, 3^{\frac{2}{3}})\right\}$
b) $S = \left\{(0, 0), (1, 1), \left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)\right\}$

105. $S = \left\{(1, 1), \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{n-m}}, \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{n-m}}\right)\right\}$

107. a) $m < -3$ ou $m \geqslant \frac{-2 + \sqrt{7}}{2}$
b) $m \geqslant \frac{5}{2}$
c) $m > 0$

108. $m \leqslant \frac{5}{4}$

109. $m \geqslant 2$

110. $m < -1$ ou $m > 1$

112. a) V b) V c) F d) V e) V f) [illegible]

113. a) V b) F c) V d) F e) F f) F g) V h) V i) V j) F

114. a) F b) V c) F d) F e) F f) F g) V h) V

116. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -6\}$
f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{8}{3}\right\}$
g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{3}{2}\right\}$
h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{5}{2}\right\}$
i) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{15}{8}\right\}$
j) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{3}{4}\right\}$
k) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{2}{9}\right\}$
l) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{-3}{10}\right\}$

117. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{4}{5}\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{4}\right\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{6}{5}\right\}$
e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$
g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$
h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 4\}$
i) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$
j) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\sqrt{\frac{11}{3}} \text{ ou } x > \sqrt{\frac{11}{3}}\right\}$
k) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 2\right\}$
l) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{3} \text{ ou } x > \frac{4}{3}\right\}$
m) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{2}{3} \text{ ou } x > 4\right\}$
n) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1\right\}$

118. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x \leqslant 0\}$

119. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$
e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}$
f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}$
g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{3} < x < -\frac{2}{3} \text{ ou } \frac{2}{3} < x < \frac{5}{3}\right\}$
h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{6} < x < 1\right\}$
i) $S = \varnothing$
j) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 3 \leqslant x \leqslant 4\}$
k) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{9}{5}\right\}$

121. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \frac{5}{2}\right\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 0\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{9}{4}\right\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{8}\right\}$
e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{-5}{8}\right\}$
f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } \frac{2}{3} < x < 1\right\}$
g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2 \text{ ou } -1 < x < 1\}$
h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant -1 \text{ ou } 0 < x < 1 \text{ ou } x < -3\}$

123. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$

125. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
g) $S = \mathbb{R}$
h) $S = \varnothing$
i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1\}$
j) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 0\}$
k) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant -1\}$
l) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

126. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

127. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

128. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

130. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{2}{5} \text{ ou } x > 1\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} < x < 1\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 2\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\right\}$

131. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } -\frac{2}{3} < x < 1 \text{ ou } x > 2 \text{ e } x \neq 0\right\}$

132. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 1\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{4} \text{ ou } 1 < x < 4\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{5} < x < 1 \text{ ou } x > 2\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

133. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

Capítulo III

135. a) 2 d) -3 g) $\frac{2}{3}$ j) $-\frac{3}{2}$

b) -2 e) -1 h) $-\frac{5}{2}$ k) $-\frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{4}{3}$ i) $-\frac{3}{2}$ l) $\frac{3}{2}$

136. $\frac{M_1}{M_2} = 100$

137. a) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{3}$ g) -3

b) 6 e) $\frac{3}{4}$ h) $-\frac{9}{4}$

c) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{4}{9}$ i) $\frac{8}{3}$

138. $V = \left\{\frac{-2}{3}\right\}$

139. a) $S = -\frac{3}{2}$ b) $S = \frac{19}{6}$ c) $S = 2$

140. $S = -\frac{5}{2}$

141. a) 81 b) 4 c) $\frac{1}{9}$ d) 16

142. $x = 23$

144. a) 2 e) 10

b) 9 f) $\frac{3}{2}$

c) $\sqrt{2}$ g) 216

d) $5\sqrt{5}$ h) $\frac{81}{2}$

145. a) 3 b) 5

146. $A^3 = 2\sqrt{2}$

147. $A = \sqrt{3} - 1$

148. $x^2 - 1 = 2$

149. $\frac{-4}{3}$

150. 6 561

151. 4

152. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

154. a) $1 + \log_5 a - \log_5 b - \log_5 c$

b) $\log_3 a + 2 \cdot \log_3 b - \log_3 c$

c) $2 \cdot \log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 b - \frac{1}{3} \log_2 c$

d) $\frac{1}{3} \log_3 a + 3 \cdot \log_3 b - \log_3 c$

e) $\frac{1}{2} \log a + \frac{3}{2} \log b - \log c$

f) $\frac{1}{3} \log a - \frac{2}{3} \log b - \frac{1}{6} \log c$

g) $1 + \frac{5}{12} \log_2 a - \frac{5}{12} \log_2 b$

h) $3 \cdot \log a - \frac{11}{9} \log b - \frac{2}{9} \log c$

155. $\log b + \log c + 2 \operatorname{colog} d$

156. $\frac{1}{2} \log a - \log b - \log c$

157. a) $1 + \log_2 a - \log_2 (a + b) - \log_2 (a - b)$

b) $2 \cdot \log_3 a + \frac{1}{2} \log_3 b + \frac{1}{2} \log_3 c -$
$- \frac{3}{5} \log_3 (a + b)$

c) $\log c + \frac{1}{3} \log a + \frac{2}{3} \log (a + b) -$
$- \frac{1}{6} \log b$

d) $\frac{1}{5} \log a + \frac{2}{5} \log (a - b) -$
$- \frac{1}{2} \log (a^2 + b^2)$.

159. a) $\frac{ab}{c}$
b) $\frac{a^2}{bc^3}$
c) $\frac{9b^3}{ac^2}$
d) $\frac{\sqrt{a}}{b^2 \sqrt[3]{c}}$
e) $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^3c}}$
f) $\frac{4 \sqrt[3]{a \sqrt{b}}}{c}$
g) $\sqrt[4]{\frac{a}{b^3 \cdot c^2}}$

160. a) $\frac{2 (a + b)}{a - b}$
b) $\frac{(a + b)^2}{a^3 (a - b)}$
c) $\frac{a \sqrt{a - b}}{a + b}$
d) $\frac{(a-b) \sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt[3]{a+b}}$
e) $\sqrt[5]{\frac{(a - b)^3 \cdot b^4}{(a + b)^2}}$

161. $x = \frac{bc^2}{\sqrt[3]{a}}$

162. a) $a + b$
b) $2a$
c) $2a + b$
d) $\frac{a}{2}$
e) $-a$
f) $1 + a$
g) $1 - a$
h) $1 - a + b$

163. pH = 8

164. 2,0368

165. 5,806

166. 2

167. $-p$

168. $3 + m$

169. 3

170. $\frac{8n}{3}$

171. $5a - 4b$

172. $x + y = 9$

173. 6,0206

174. $n = 14$

176. $\frac{1 - 2a}{a + b}$

177. $\frac{17}{6}$

178. $\frac{4 (3 - a)}{a + 3}$

179. $\frac{-3}{2}$

180. $\frac{k}{3}$

181. $\frac{a + 1}{2b}$

182. $\frac{3}{2}$

183. $\frac{-2}{m}$

184. $\log_{10} 2$

185. $\frac{-1}{2}$

186. $\frac{2 - a}{a + b}$

187. $\frac{3}{8}$

188. d

189. $\log a$

Capítulo IV

205. a) V b) V c) F d) V e) F f) F g) F h) V i) F j) F

206. $y = \log_e x, x \in \mathbb{R}^*_+$

207. $f(e^3) = -3$

208. $x = \pm 2$

209. a)

b)

c)

c)

d)

211.

210. a)

b)

212. a)

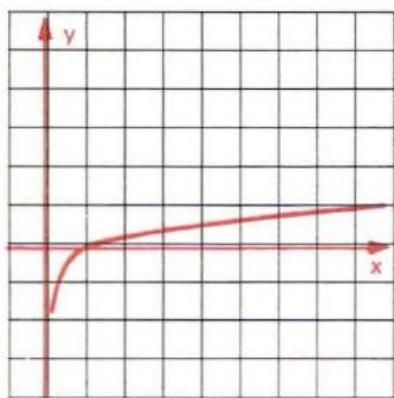
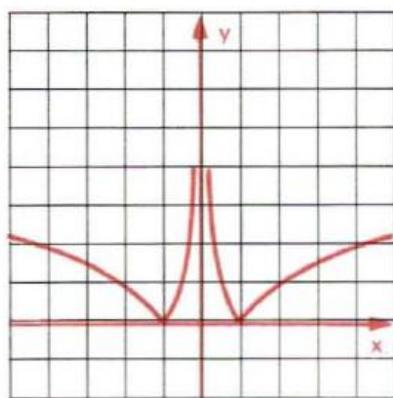
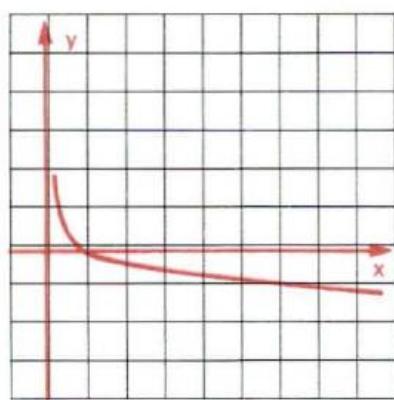
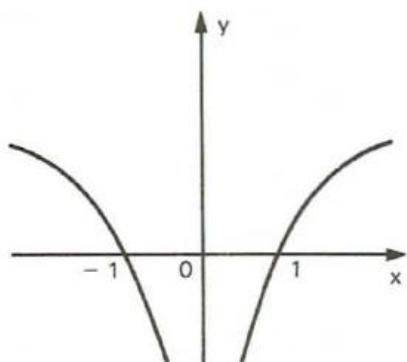
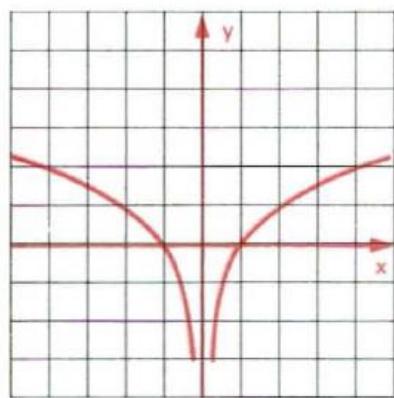
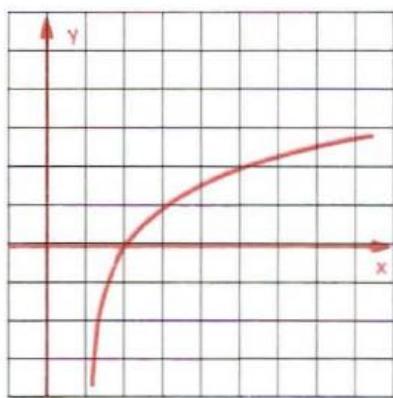
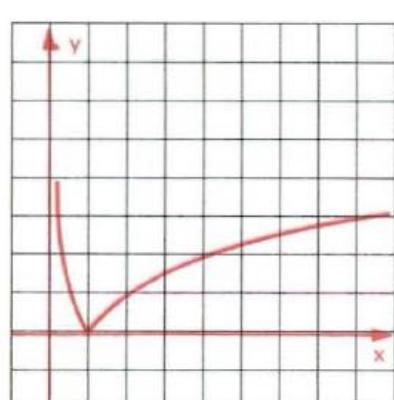
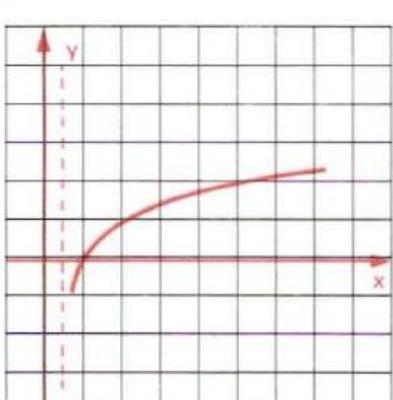
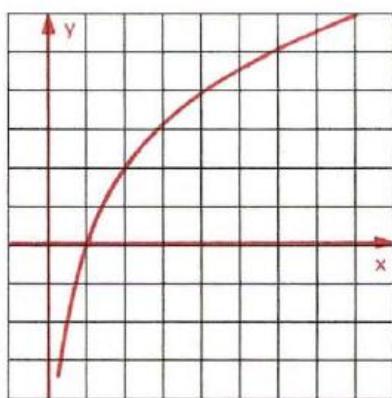
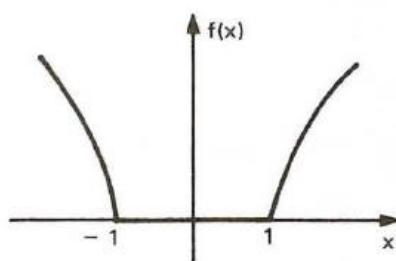
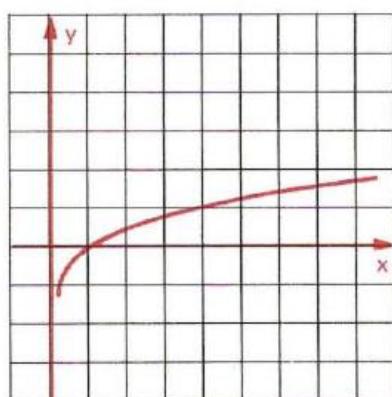
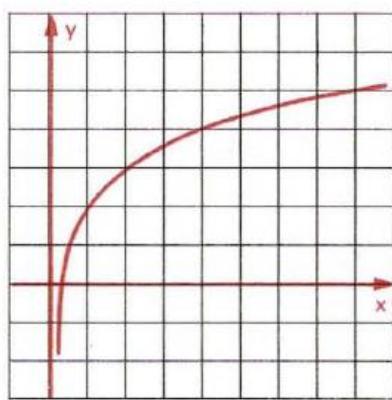
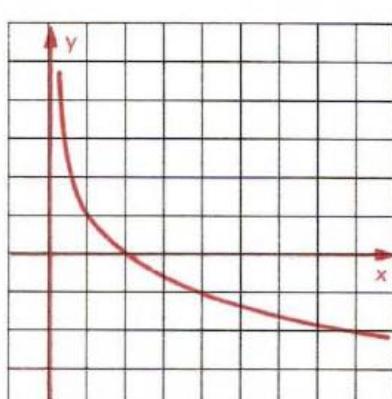
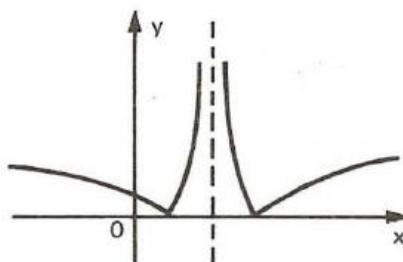
b)

c)

d)

213. a)

b)

214.

215.

216. 2

218. a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\right\}$

b) $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{4}\right\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 3\}$

219. $\mathbb{R} - \{3\}$

220. $0 < k < 4$

222. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq 2\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

c) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 3 \text{ e } x \neq 2\right\}$

Capítulo V

224. a) $S = \{\log_5 4\}$

b) $S = \left\{\log_3 \frac{1}{2}\right\}$

c) $S = \{(\log_7 2)^2\}$

d) $S = \{\sqrt{\log_3 5}, -\sqrt{\log_3 5}\}$

e) $S = \{\log_{625} 62{,}5\}$

f) $S = \left\{\log_9 \frac{2}{3}\right\}$

g) $S = \left\{\log_{343} \frac{49}{5}\right\}$

225. $x = \dfrac{\log b}{\log a}$

227. $t = \ell n \sqrt[3]{2}$

228. $\left(1 - 2^{-\frac{1}{16}}\right)$ da quantidade inicial

230. a) $S = \{\log_{\frac{2}{3}} 9\}$ c) $S = \{\log_{45} 405\}$

b) $S = \{\log_{\frac{49}{27}} 567\}$

231. a) $S = \{\log_{\frac{3}{2}} 3\}$ c) $S = \{\log_{\frac{2}{3}} 8\}$

b) $S = \left\{\log_{\frac{5}{3}} \dfrac{13}{6}\right\}$

232. $S = \{\log_{72} 6\}$

233. a) $S = \{1, \log_2 3\}$

b) $S = \{0, \log_2 5\}$

c) $S = \{\log_3 4\}$

d) $S = \varnothing$

e) $S = \left\{\log_2 \dfrac{3}{2}, \log_2 \dfrac{5}{2}\right\}$

f) $S = \left\{2, \log_3 \dfrac{2}{3}\right\}$

234. $S = \left\{\log_{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

235. $S = \{\log_{\frac{2}{7}} 3\}$

236. $S = \left\{\dfrac{1}{2} \log_a \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

237. $S = \left\{\left(\log_{64} 6, \dfrac{1}{6}\right), \left(\dfrac{1}{6}, \log_{64} 6\right)\right\}$

238. a) $S = \{3\}$ d) $S = \{4, -5\}$

b) $S = \varnothing$ e) $S = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$

c) $S = \{3, 7\}$ f) $S = \varnothing$

239. a) $S = \{2\}$

b) $S = \left\{-\dfrac{2}{5}\right\}$

c) $S = \left\{-2, -\dfrac{1}{3}\right\}$

d) $S = \left\{-4, \dfrac{3}{2}\right\}$

e) $S = \left\{5, -\dfrac{1}{2}\right\}$

f) $S = \{4, -2\}$

g) $S = \{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$

240. $x = 2$

241. $x = \dfrac{1}{2}$

242. a) $S = \{8\}$ e) $S = \{13\}$

b) $S = \{64\}$ f) $S = \{2, -2\}$

c) $S = \{3\}$ g) $S = \{3\}$

d) $S = \{1\}$

243. $S = \left\{2, -\dfrac{1}{3}\right\}$

244. a) $S = \{4\}$ c) $S = \varnothing$

b) $S = \{8, 2\}$ d) $S = \{5\}$

245. $S = \{(1, 2)\}$

246. a) $S = \left\{64, \dfrac{1}{4}\right\}$

b) $S = \{\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}\}$

c) $S = \left\{1\,000, \dfrac{1}{100}\right\}$

d) $S = \left\{4, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

e) $S = \{2, 16\}$

f) $S = \left\{1, 100, \dfrac{1}{100}\right\}$

247. $S = \varnothing$

248. a) $S = \{100, 1\,000\}$ d) $S = \{10^4, 10^{-1}\}$

b) $S = \{4, 512\}$ e) $S = \{16\}$

c) $S = \{3, 3^{-\frac{7}{3}}\}$

250. a) $S = \left\{5, \dfrac{3}{2}\right\}$ e) $S = \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

b) $S = \varnothing$ f) $S = \{1, 3\}$

c) $S = \{4\}$ g) $S = \left\{0, -\dfrac{2}{3}\right\}$

d) $S = \varnothing$

251. $S = \{1\}$

253. a) $S = \{2\}$ d) $S = \{-2, 4\}$

b) $S = \varnothing$ e) $S = \varnothing$

c) $S = \varnothing$ f) $S = \{4\}$

254. a) $S = \left\{2, 3, \dfrac{3}{2}\right\}$

b) $S = \left\{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$

c) $S = \left\{2, \dfrac{11}{9}\right\}$

256. $S = \left\{ \frac{5}{3} \right\}$

257. $S = \{ 1 \}$

258. $S = \{ 1 \}$

259. a) $S = \{ 5 \}$
b) $S = \{ 3 \}$
c) $S = \{ 25 \}$
d) $S = \{ 2 \}$
e) $S = \{ 4 \}$
f) $S = \left\{ \frac{14}{5}, \frac{10}{11} \right\}$
g) $S = \{ -3, 0, 1, 4 \}$

260. $S = \{ 10, 10^5 \}$

261. $S = \{ 1, 2 \}$

262. a) $S = \left\{ \frac{9}{2} \right\}$
b) $S = \{ 2, 3 \}$
c) $S = \{ 48 \}$

263. $S = \{ 25 \}$

264. $S = \{ \log_2 3 \}$

266. a) $S = \{ 5 \}$
b) $S = \{ -2 \}$
c) $S = \{ 3 + \sqrt{11} \}$
d) $S = \varnothing$
e) $S = \{ 1 \}$
f) $S = \{ 3 \}$
g) $S = \{ 2 \}$

267. $S = \{ 10 \}$

268. $S = \{10\}$

269. a) $S = \{ 1, 10^4 \}$
b) $S = \{ 10 \}$
c) $S = \left\{ 512, \frac{1}{16} \right\}$

270. $S = \left\{ \log_3 10, \log_3 \frac{28}{27} \right\}$

271. a) $S = \{ 10, \sqrt[9]{10} \}$
b) $S = \{ 5, \sqrt[5]{5} \}$
c) $S = \left\{ \frac{1}{8}, 2 \right\}$

272. $S = \{ -1, \log 2 \}$

274. a) $S = \{ (4, 2), (2, 4) \}$
b) $S = \left\{ \left(2, \frac{1}{2} \right) \right\}$
c) $S = \{ (20, 5), (5, 20) \}$
d) $S = \{ 6, 3 \}$
e) $S = \{ (25, 16), (16, 25) \}$

275. $S = \{ (\sqrt{2}, 1) \}$

277. a) $S = \{ (100, 1\,000) \}$
b) $S = \{ (8, 128) \}$

278. $S = \left\{ (2, 4), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right), \left(2, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{1}{2}, 4 \right) \right\}$

280. a) $S = \{ 3, 9 \}$
b) $S = \left\{ 100, \frac{1}{10} \right\}$
c) $S = \left\{ 2, \frac{1}{16} \right\}$
d) $S = \left\{ 3, \frac{1}{81} \right\}$
e) $S = \left\{ 3, \frac{1}{9} \right\}$

281. $S = \{ 2, 4 \}$

282. a) $S = \left\{ 10, \frac{1}{10} \right\}$
b) $S = \left\{ 100, \frac{1}{10} \right\}$
c) $S = \left\{ 100, \frac{1}{100} \right\}$

283. a) $S = \{ 10 \}$
b) $S = \left\{ 9, \frac{1}{9} \right\}$
c) $S = \{ 1\,000 \}$

284. $S = \{ 2 \}$

285. $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

286. a) $S = \{ (8, 2) \}$
b) $S = \{ (4, 8), (8, 4) \}$
c) $S = \{ (125, 4), (625, 3) \}$

288. a) $S = \{ 7 \}$ b) $S = \{ 3 \}$ c) $S = \{ 6 \}$

290. a) $S = \{ 9, \sqrt{3} \}$
b) $S = \{8, 2^{-1/3}\}$
c) $S = \left\{ 9, \frac{1}{3} \right\}$

291. a) $S = \{ 2 \}$ b) $S = \{ 8 \}$

292. $S = \{ 5 \}$

293. a) $S = \left\{ (3, 4), \left(\frac{-7}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$
b) $S = \{ (\sqrt{3}, 4), (-\sqrt{3}, 4) \}$
c) $S = \{ (5, 0) \}$
d) $S = \left\{ \left(64, \frac{1}{4} \right) \right\}$
e) $S = \{ (2^{4a-6b}, 2^{6a-12b}) \}$

295. $S = \{ 19 \}$

296. $a = b^2$

297. $x = 2^{2+\sqrt{5}}$ ou $x = 2^{2-\sqrt{5}}$

298. $x = a$

299. $S = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$

300. a) $S = \left\{ 2, \frac{1}{2} \right\}$ c) $S = \left\{ 16, \frac{1}{2} \right\}$
b) $S = \left\{ 9, \frac{1}{3} \right\}$ d) $S = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right\}$

301. a) $S = \left\{ \frac{1}{5} \right\}$ b) $S = \left\{ \frac{1}{9} \right\}$

302. $S = \{ 2, 8 \}$

303. a) $S = \{ (4, 2), (2, 4) \}$
b) $S = \{ (3, 27), (27, 3) \}$

304. $S = \{ 3 \}$

306. a) $S = \left\{ 9, \frac{1}{9} \right\}$ c) $S = \{ 2 \}$
b) $S = \left\{ 3, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$ d) $S = \left\{ 4, 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

307. $S = \{ 5 \}$

308. $S = \{ 1, 2, 2^{-\frac{3}{4}} \}$

309. a) $S = \{ a^{-2}, a^{-\frac{1}{2}} \}$
b) $S = \{ a^{-\frac{4}{3}}, a^{-\frac{1}{2}} \}$
c) $S = \{ a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, a^{\frac{-1}{\sqrt{2}}} \}$
d) $S = \{ a^2 \}$

310. $S = \{ 1, \sqrt[3]{2b^2} \}$

311. $S = \{ 2^{\log_{108} 9} \}$

312. $S = \{ 1, 2 \}$

313. $S = \left\{ \frac{a - b}{2} + \sqrt{ab}, \frac{a - b}{2} - \sqrt{ab} \right\}$

314. a) $S = \{ (8, 2), (-12, -\sqrt[3]{12}) \}$
b) $S = \{ (4, 16) \}$
c) $S = \{ 2^{\frac{3}{5}}, 2^{\frac{2}{5}} \}$

315. $S = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$

316. $S = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3} \right) \right\}$

317. $S = \{ (1, 1), (\log_a b, \log_b a) \}$

318. $S = \{ (6, 2), (2, 6) \}$

319. a) $S = \{ (1, 1), (4, 2) \}$
b) $S = \{ (1, 1), (2, 4) \}$
c) $S = \{ (a^{\frac{a}{a-1}}, a^{\frac{1}{a-1}})$ em que $a = \log_2 3 \}$

320. a) $S = \{ (10, 100) \}$ c) $S = \{ (10, 10) \}$
b) $S = \{ (10, 100) \}$

Capítulo VI

322. a) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > \log_4 7 \}$
b) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 5 \}$
c) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > \log_8 \frac{9}{4} \}$
d) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{625} 15 \}$
e) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{27} 36 \}$
f) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{\frac{2}{3}} 4 \}$
g) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{\log_2 5} \leqslant x \leqslant \sqrt{\log_2 5} \}$

324. a) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3} \right\}$
b) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \log_{72} 54 \}$
c) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{400} \frac{8}{125} \right\}$
d) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{\frac{2}{9}} \frac{4}{3} \right\}$

325. a) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{\frac{5}{3}} 4 \}$
b) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{8} \right\}$
c) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{7} \right\}$
d) $S = \varnothing$
e) $S = \mathbb{R}$

326. a) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{200} 375 \}$
b) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{\frac{9}{16}} \frac{15}{32} \right\}$

327. a) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < \log_3 2$ ou $x > 1 \}$
b) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \log_2 3 \}$
c) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \log_5 3 \}$
d) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \log_2 \frac{3}{2} \right\}$
e) $S = \varnothing$
f) $S = \mathbb{R}$

328. $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{\frac{3}{2}} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$

329. $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid \log_{\frac{2}{5}} 4 \leqslant x \leqslant \log_{\frac{2}{5}} 2 \}$

330. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}\right\}$

331. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x < \frac{6}{5}\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x \leqslant 4\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x < 0 \text{ ou } \frac{5}{2} < x \leqslant 3\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } 1 < x < 5\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{2}\right\}$

g) $S = \varnothing$

332. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < -\frac{1}{2} \text{ ou } \frac{3}{2} < x < 2\right\}$

333. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

334. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < x < 2\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

335. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} < x \leqslant \frac{7}{9}\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < -2 \text{ ou } 1 < x \leqslant 2\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{5}{2}\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < -5 \text{ ou } 1 < x < 3\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x < -\frac{1}{4} \text{ ou } \frac{3}{4} < x \leqslant 1\right\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > -1\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2 - \sqrt{3} \text{ ou } 2 + \sqrt{3} < x \leqslant 4\}$

336. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 2\right\}$

337. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leqslant x < -\frac{1}{2}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < \frac{1}{\sqrt{8}}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 - \sqrt{2} \text{ ou } 2 + \sqrt{2} < x < 4\}$

338. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 11 \leqslant x \leqslant 101\}$

339. a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant \frac{28}{9} \text{ ou } x \geqslant 12\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10} < x < 10\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant \frac{1}{32} \text{ ou } x \geqslant 2\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \frac{-2}{\sqrt{3}} \text{ ou } \frac{2}{\sqrt{3}} < x < 2\right\}$

340. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{9} \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{3}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{16} \text{ ou } x > 2\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < 4\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10^{\sqrt{3}}} < x < \frac{1}{10} \text{ ou } 10 < x < 10^{\sqrt{3}}\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 10^{-2} < x < 10^{-1} \text{ ou } 10 < x < 10^2\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

341. $S = \{X \in \mathbb{R} \mid 0 < x < e^{\frac{-3}{2}} \text{ ou } x > e^2\}$

342. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{8} < x < 1 \text{ ou } x > 4\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \text{ ou } x \geqslant 8\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{16} < x < \frac{1}{8} \text{ ou } 8 < x < 16\right\}$

343. $1 < x < e$

344. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^{\frac{-12}{17}} < x < 1\}$

345. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ ou } x > 4\}$

346. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < a \text{ ou } 1 < x < \frac{1}{a}\right\}$

348. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{11} < x < \frac{1}{2}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\right\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 2\}$

349. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

350. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{-7 + \sqrt{97}}{12}\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{4 + \sqrt{97}}{9}\right\}$

351. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

353. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leqslant x < 1\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant \frac{1}{4}\right\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 125\}$
e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{8}\right\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \sqrt[4]{3}\}$

354. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leqslant x < 1\right\}$

355. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < a\}$

356. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{a}\right\}$

357. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant a^{\frac{1}{a}}\}$

358. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant a^a\}$

359. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -\sqrt{6} \text{ ou } \sqrt{6} < x < 3\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 4 \text{ ou } x \geqslant 6\}$

360. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 1\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leqslant x < 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$

361. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 2\}$

362. $0 < a < 1 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{a-3}{a-2} < x \leqslant 2\right\}$
$1 < a < 2 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < \frac{a-3}{a-2}\right\}$
$a = 2 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$
$a > 2 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{a-3}{a-2}\right\}$

363. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{4} \text{ ou } x > 2\right\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -8 \text{ ou } x > 2\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \text{ ou } 1 < x < \frac{1 + \sqrt{17}}{4}\right\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 32\right\}$

364. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{8} \text{ ou } 1 < x < 2\right\}$

366. a) $a \geqslant \frac{1}{2}$
b) $0 < a \leqslant 1\,000$
c) $0 < a \leqslant \frac{1}{81}$ ou $a \geqslant 81$
d) $0 < a \leqslant 1$ ou $a \geqslant 16$

367. $0 < m < \frac{1}{10}$

368. $0 < N < 1$

369. $0 < t < e^{-9}$ ou $t > e^{-1}$

370. $\frac{3}{2} < a < 2$ ou $\frac{5}{2} < a < 3$

371. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } 0 \leqslant x < 1\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{4}{3} < x \leqslant \frac{5}{3}\right\}$

372. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \sqrt[10]{10}\}$

374. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \text{ ou } x > 2 \text{ e } x \neq -1 \text{ e } x \neq 0\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x < 3 \text{ e } x \neq -1 \text{ e } x \neq 0\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{4}{5} \text{ ou } x > 4 \text{ e } x \neq 0\right\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$
g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 4\}$
h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} < x < -2 \text{ ou } -\frac{3}{2} < x < \frac{8}{3} \text{ e } x \neq \frac{3}{2}\right\}$
i) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{3}{2} \text{ ou } 2 < x < \frac{5}{2} \text{ ou } x > 3\right\}$

375. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

376. $(a > 1 \text{ e } b > 1) \text{ ou } (0 < a < 1 \text{ e } 0 < b < 1)$

377. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{3} < x < 2\right\}$

378. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < a^{-\sqrt{2}} \text{ ou } x > a^{\sqrt{2}}\}$

379. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3^{\log_{\frac{2}{3}} 2}\}$

380. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \log_2 \frac{5}{4} < x < \log_2 3\right\}$

381. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 3\right\}$

382. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

Capítulo VII

383. 0, −2, 5, −4

384. a) 3,5065 b) 1,4048 c) 0,7574 d) $\overline{1}$,8692 e) $\overline{3}$,5527

385. a) 7 530 b) 63,6 c) 8,27 d) 0,327 e) 0,00467 f) 0,0134

386. a) 0,00813 b) 0,00061 c) 0,357 d) 0,0223

387. a) 3,5152 b) 1,3751 c) $\overline{2}$,6605 d) $\overline{1}$,9221 e) 0,4343

388. a) 22,65 b) 2,727 c) 0,5474 d) 0,02325

389. 3

391. a) 0,6309 b) 2,3222 c) 0,6825 d) 1,1133 e) 0,7737

392. 6

393. 85

394. a) 2,86 b) 2,73 c) 4,91 d) −0,62 e) 3,91

395. a) $S = \{1,58; 2,32\}$ b) $S = \{0; 1,26\}$ c) $S = \{0,30; 0,69\}$ d) $S = \{0,69; 1,10\}$

396. $S = \{-6\}$

398. a) 1,201 b) 1,778 c) 10,554 d) 40,520

399. 1,68 cm

400. 2,60

402. 38 meses

403. 7 trimestres

404. R$ 1 700 000,00

405. R$ 3 273 000,00

406. 2 422 bactérias

407. $k = 0,004845$

Testes de vestibulares

Potências e raízes

1. (Fuvest-SP) Qual desses números é igual a 0,064?

a) $\left(\frac{1}{80}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{8}\right)^2$ c) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ d) $\left(\frac{1}{800}\right)^2$ e) $\left(\frac{8}{10}\right)^3$

2. (Mackenzie-SP) Considere as seguintes afirmações:

1) $(0{,}001)^{-3} = 10^9$

2) $-2^{-2} = \frac{1}{4}$

3) $(a^{-1} + b^{-1})^{-2} = a^2 + b^2$

Associando *V* ou *F* a cada afirmação, nesta ordem, conforme seja *verdadeiro* ou *falso*, tem-se:

a) V V V
b) V V F
c) V F V
d) F V F
e) V F F

3. (PUC-SP) Se $a = 16$ e $x = 1{,}25$, quanto vale a^x?

a) $\sqrt{2}$
b) 32
c) 20
d) $16\sqrt{2}$
e) 64

4. (PUC-RJ) A indústria de computação cada vez mais utiliza a denominação 1K como substituto para o número mil (por exemplo, "Y2K" como o ano dois mil). Há um erro de aproximação neste uso, já que o valor técnico com que se trabalha, $1K = 2^{10}$, não é 1 000. Assim, rigorosamente falando, uma notícia como "o índice Dow-Jones pode atingir 3K" significaria que o índice pode atingir:

a) 3 000
b) 2 960
c) 3 012
d) 2 948
e) 3 072

5. (Fund. Carlos Chagas-SP) A expressão $\frac{2^{n+3} \cdot 2 - 2^{n-1} \cdot 7}{5 \cdot 2^{n-4}}$ é igual a:

a) 40
b) 30
c) $\frac{5}{8}$
d) -2^{-2}
e) -2^6

6. (Fatec-SP) Se $A = (-3)^2 - 2^2$, $B = -3^2 + (-2)^2$ e $C = (-3 - 2)^2$, então $C + A \times B$ é igual a:

a) -150
b) -100
c) 50
d) 10
e) 0

7. (Mackenzie-SP) Se $(2^x \cdot k^{y+1} \cdot 5^{t+3}) \cdot (2^{x-1} \cdot k^y \cdot 5^{t+1})^{-1} = 150$, então k vale:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

8. (Fatec-SP) Considere que a massa de um próton é $1{,}7 \times 10^{-27}$ kg, o que corresponde a cerca de 1 800 vezes a massa de um elétron.
Dessas informações é correto concluir que a massa do elétron é aproximadamente:

a) 9×10^{-30} kg
b) $0{,}9 \times 10^{-30}$ kg
c) $0{,}9 \times 10^{-31}$ kg
d) $2{,}8 \times 10^{-31}$ kg
e) $2{,}8 \times 10^{-33}$ kg

9. (U. E. Londrina-PR) Simplificando-se a expressão $\dfrac{3^{3-n} + 3 \cdot 3^{2-n} - 9 \cdot 3^{1-n}}{9 \cdot 3^{2-n}}$ para $n \in \mathbb{R}$, obtém-se:

a) $\dfrac{1}{6}$
b) $\dfrac{1}{3}$
c) $6 \cdot 3^{n-1}$
d) $1 - 3^{1-n}$
e) -3^{n+1}

10. (UF-MG) Considere o conjunto de todos os valores de x e y para os quais a expressão a seguir está definida.

$$M = \frac{\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{y^2}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{xy} + \dfrac{1}{y^2}}$$

Nesse conjunto, a expressão equivalente a M é:

a) $(x - y)(x + y)$
b) $(x - y)(x^2 + y^2)$
c) $\dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$
d) $\dfrac{x - y}{x + y}$
e) $\dfrac{(x - y)(x^2 + y^2)}{(x + y)}$

11. (UF-RN) Dados os números $M = 9{,}84 \times 10^{15}$ e $N = 1{,}23 \times 10^{16}$, pode-se afirmar que:

a) $M < N$
b) $M + N = 1{,}07 \times 10^{16}$
c) $M > N$
d) $M \cdot N = 1{,}21 \times 10^{31}$

12. (Unaerp-SP) Efetuando $(x^{a+b})(x^{a-b})(x^3)$, obtemos:

a) $x^{3(a-b)^2}$
b) x^{2a+3}
c) $x^{3(a^2-b^2)}$
d) x^{3a^2-b}
e) $x^{3b^2-a^2}$

13. (UF-PI) O maior fator primo do número $N = 5^{10} - 5^9 - 500$ é:

a) 17
b) 29
c) 31
d) 43
e) 71

14. (ESPM-SP) A expressão $(0{,}666...)^{0{,}666...}$ é equivalente a:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{12}}{3}$
b) $\sqrt[3]{12}$
c) $\dfrac{\sqrt[3]{18}}{3}$
d) $\sqrt[3]{18}$
e) $\sqrt[3]{2}$

15. (UF-SE) Um raio de luz, propagando-se no vácuo, desloca-se com velocidade de $3{,}0 \cdot 10^5$ km/s aproximadamente. Se a distância entre dois planetas é de $9{,}0 \cdot 10^7$ km, então o tempo, em minutos, que o raio de luz levará para cobrir essa distância é:

a) 5,2
b) 5
c) 4,5
d) 4
e) 3,8

16. (FEI-SP) Se *a* e *b* são as quantidades de algarismos de $x = 4^{12} \cdot 5^{20}$ e de $y = 4^{14} \cdot 5^{18}$, então:

a) $a = b$
b) $a = b + 1$
c) $a = b - 1$
d) $a = b + 2$
e) $a = b - 2$

17. (Fuvest-SP) O menor número natural *n*, diferente de zero, que torna o produto de 3 888 por *n* um cubo perfeito é:

a) 6
b) 12
c) 15
d) 18
e) 24

18. (FGV-SP) Se $x = 3\,200\,000$ e $y = 0{,}00002$, então xy vale:

a) 0,64
b) 6,4
c) 64
d) 640
e) 6 400

19. (FEI-SP) Se $p = \sqrt{8^2 + 11^2}$, então:

a) $13 < p < 14$
b) $14 < p < 15$
c) $12 < p < 13$
d) $15 < p < 16$
e) $11 < p < 12$

20. (PUC-MG) O valor da expressão $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$ é:

a) 6
b) 8
c) 10
d) $6 + 2\sqrt{5}$
e) $6 - 2\sqrt{5}$

21. (Puccamp-SP) Simplificando-se a expressão $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 + 1/\left(5 + 2\sqrt{6}\right)$, obtém-se:

a) 10
b) 25
c) $10 - 2\sqrt{6}$
d) $10 + 2\sqrt{6}$
e) $10 + 4\sqrt{6}$

22. (Unaerp-SP) O valor da expressão $a^{-3} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot c^{-1}$, quando $a = -1$, $b = -8$ e $c = \frac{1}{4}$, é:

a) -8
b) -4
c) $\frac{1}{2}$
d) 4
e) 8

23. (ESPM-SP) Simplificando a expressão $\sqrt{\frac{2^{13} + 2^{16}}{2^{15}}}$, obtemos:

a) $\sqrt{2}$
b) 1,5
c) 2,25
d) 2^7
e) 1

24. (UF-SC) O valor mais próximo da expressão $\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{-2} + \left(\frac{6{,}25}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^0$ é:

a) 1,52
b) 1,97
c) 1,35
d) 1,03
e) 1,48

25. (Fatec-SP) Se na expressão $(x-8)/\sqrt{(7+\sqrt[3]{x})}-3$, com $x > 8$, substituirmos $\sqrt[3]{x}$ por *t*, obteremos uma expressão equivalente a:

a) $(t+2)^2$

b) t^2+2t+4

c) $\sqrt{(7+t)}+3$

d) $\dfrac{t^3-8}{\sqrt{7}+\sqrt{(t-3)}}$

e) $(t^2+2t+4)\cdot\left[\sqrt{(7+t)}+3\right]$

26. (Puccamp-SP) Efetuando-se $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}+\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$:

a) $-\dfrac{22}{5}$

b) $-8\sqrt{\dfrac{6}{5}}$

c) 0

d) $-4\sqrt{6}+11$

e) $-\dfrac{2(4\sqrt{6}+11)}{5}$

27. (USF-SP) O valor da expressão $\dfrac{\sqrt{22}}{\sqrt{22}-\sqrt{21}}-\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{22}-\sqrt{21}}$ é:

a) $12\sqrt{77}$

b) 1

c) $\sqrt{22}-\sqrt{21}$

d) -1

e) $-12\sqrt{77}$

28. (Mackenzie-SP) Se *k* é um número real maior que zero, então $1/\left[\sqrt{(k^2+1)}-k\right]$:

a) diminui quando *k* aumenta.
b) é menor que 0.
c) está entre 0 e *k*.
d) está entre *k* e 2k.
e) é maior que 2k.

29. (Mackenzie-SP)

I) Se $k+\dfrac{1}{k}=3$, então $\sqrt{k^3+\left(\dfrac{1}{k^3}\right)}=3\sqrt{2}$.

II) $\left[\sqrt{(3+\sqrt{5})}+\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)\right]^2=10$

III) Não existe *x* real tal que $\sqrt{\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}}=|x-2|$.

Relativamente às afirmações anteriores, é correto afirmar que:

a) todas são verdadeiras.
b) todas são falsas.
c) somente I e II são verdadeiras.
d) somente I e III são verdadeiras.
e) somente II e III são verdadeiras.

30. (Puccamp-SP) Efetuando-se as operações indicadas na expressão $\sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{11}{25}}}$, obtém-se:

a) $\frac{\sqrt[3]{14} + 2}{5}$

b) $\frac{\sqrt[3]{114}}{5}$

c) $\frac{6}{5}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{3}{5}$

31. (UE-CE) Se $k = \left[\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cdot \left[\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ e $m = 2 + \sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}}$, então $(k - 1)^3 + (m - 2)^3$ é igual a:

a) $\frac{61}{27}$ b) $\frac{62}{27}$ c) $\frac{64}{27}$ d) $\frac{65}{27}$

32. (UF-SE) Se $x = \frac{81\sqrt{81^{-1}\sqrt{81^{-1}\sqrt{81^{-1}}}}}{4 \cdot 3^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{3}}$, então:

a) $x > 4$

b) $x = 3{,}333...$

c) $\frac{1}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

d) $x = 0{,}555...$

e) $x < \pi$

33. (UF-MG) A única alternativa *verdadeira* é:

a) Se $x(x - 2) = 1$, então $x = 1$ ou $x - 2 = 1$.

b) $\sqrt{17^2 + 25^2} = 17 + 25$

c) $\frac{2(x - 1)^2 + (x + 1)}{x - 1} = 2(x - 1) + (x + 1)$, para todo número real $x \neq 1$.

d) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^2 - \left[(-2)^3\right]^2 = 17$

e) $x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\left(x^3 - 1\right)$, para todo número real $x \geqslant 0$.

34. (ETF-RJ) Sabe-se que n é um número natural e maior do que 1. Então o valor da expressão $\sqrt{2^{2n} + \frac{2^{2n+2}}{5}}$ é:

a) $\frac{1}{5}$

b) 2

c) 2^n

d) $\frac{n}{2}$

e) $\frac{n}{5}$

35. (Vunesp-SP) Assinale a alternativa que contém a afirmação correta.

a) Para a e b reais, sendo $a \neq 0$, $\left(2a^{-1}\right)b = \left(\frac{b}{2a}\right)$.

b) Para quaisquer a e b reais, $a^2 \cdot b^3 = (ab)^6$.

c) Para quaisquer a e b reais, $5a + 4b = 9ab$.

d) Para quaisquer a e b reais, se $a^3 = b^3$, $a = b$.

e) Para a e b reais, sendo $a > 0$ e $b > 0$, $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

36. (Unifor-CE) Sobre as sentenças

I) $\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{45} = 6 \cdot \sqrt{5}$

II) $2^{3^2} = 512$

III) $64^{\frac{2}{3}} = 16$

é correto afirmar que:

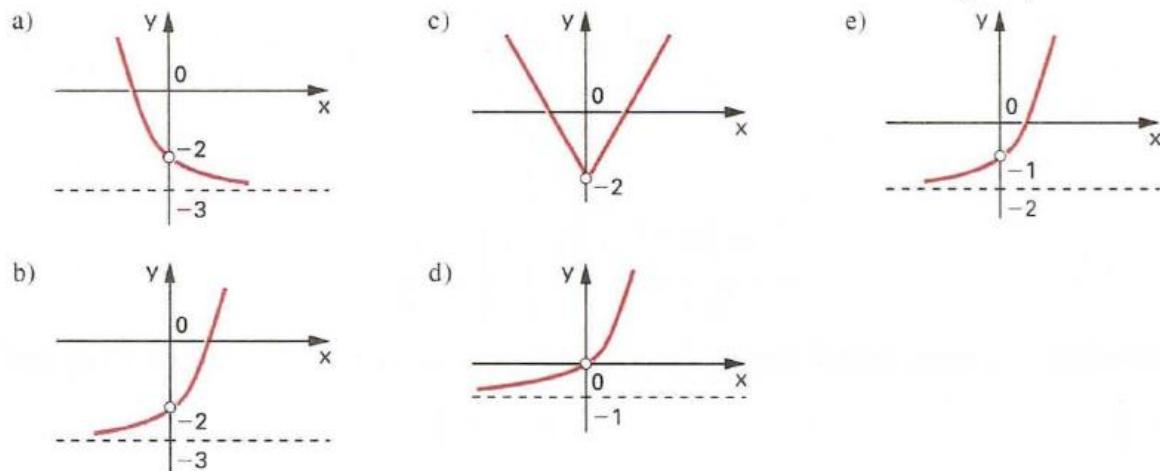
a) somente I e II são verdadeiras.
b) somente I e III são verdadeiras.
c) somente II e III são verdadeiras.
d) I, II e III são verdadeiras.
e) I, II e III são falsas.

37. (U. E. Londrina-PR) Simplificando-se a expressão $\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$, obtém-se:

a) -1
b) 3
c) $7 - \sqrt{2}$
d) $3 - 2\sqrt{2}$
e) $3 + 2\sqrt{2}$

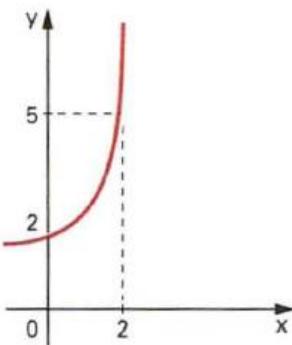
38. (U. E. Londrina-PR) Seja o número real $x = \frac{\sqrt{500} - 3\sqrt{20} + 2 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}$. Escrevendo-se *x* na forma $x = a + b\sqrt{c}$, tem-se que $a + b + c$ é igual a:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

39. (Unifor-CE) Sobre as sentenças

I) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{63} + 7 \cdot \sqrt{3} = 7 \cdot \sqrt{10}$

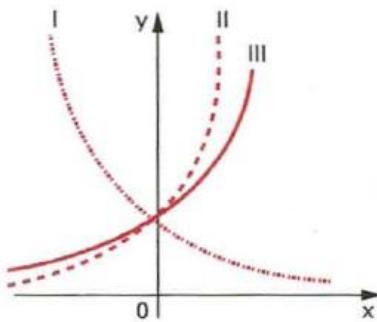
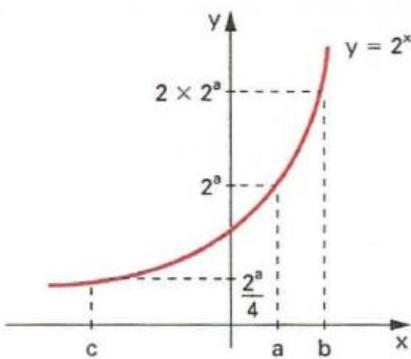
II) $\frac{2}{3} m^2 n^3 \cdot \sqrt{\frac{27a^2}{4m^6 n^4}} = \frac{an \cdot \sqrt{3}}{m}$, se $m > 0$, $n > 0$ e $a > 0$

III) Se $\sqrt[3]{250} = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, então $x = \frac{1}{3}$, $y = 0$ e $z = 1$.

é correto afirmar que *somente*:

a) I e II são verdadeiras.
b) II e III são verdadeiras.
c) I é verdadeira.
d) II é verdadeira.
e) III é verdadeira.

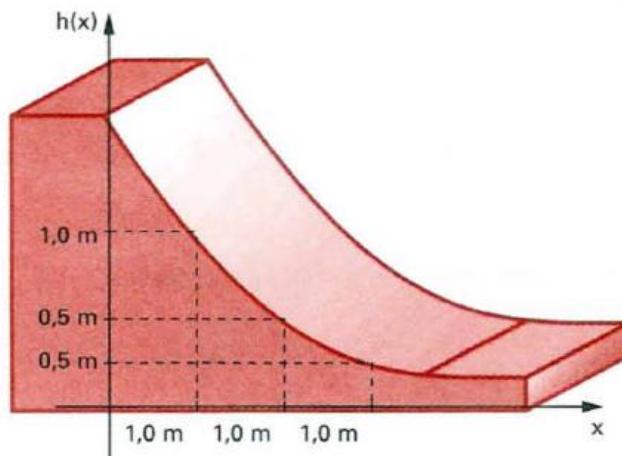
Função exponencial

40. (Mackenzie-SP) A melhor representação gráfica da função real definida por $y = \frac{2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 3}{2^x - 1}$, $x \neq 0$, é:

a)
c)
e)
b)
d)

41. (U. F. Santa Maria-RS) A figura mostra um esboço do gráfico da função $y = a^x + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$.

Então, o valor de $a^2 - b^2$ é:

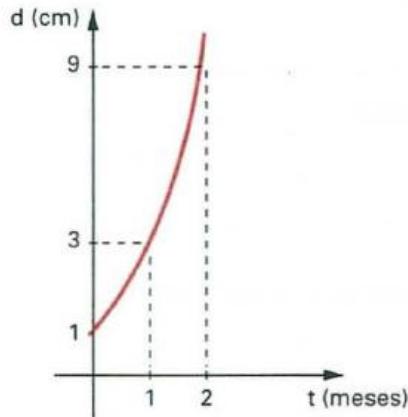
a) -3
b) -1
c) 0
d) 1
e) 3

42. (Mackenzie-SP) Na figura, os gráficos I, II e III referem-se, respectivamente, às funções $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$.

Então, está correto afirmar que:

a) $0 < a < b < c$
b) $0 < b < c < a$
c) $a < 0 < b < c$
d) $0 < a < c < b$
e) $a < 0 < c < b$

43. (UF-RN) No plano cartesiano abaixo estão representados o gráfico da função $y = 2^x$, os números *a*, *b*, *c* e suas imagens.

Observando-se a figura, pode-se concluir que, em função de *a*, os valores de *b* e *c* são, respectivamente:

a) $\frac{a}{2}$ e $4a$
b) $a - 1$ e $a + 2$
c) $2a$ e $\frac{a}{4}$
d) $a + 1$ e $a - 2$

44. (Cefet-PR) Uma rampa para manobras de *skate* é representada pelo esquema abaixo.

Se a parte curva pudesse ser associada a uma função, esta função seria:

a) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 3$

b) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + \frac{5}{2}$

c) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$

d) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$

e) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 1$

45. (Umesp-SP) Uma planta cresce em diâmetro (d), em função do tempo (t), conforme o gráfico abaixo.

Considerando que o formato da planta é circular, o comprimento da circunferência da planta em 4 meses será de aproximadamente:

a) 50 cm
b) 72 cm
c) 143 cm
d) 254 cm
e) 500 cm

46. (ESPM-SP) Se $x \in \mathbb{R}$ e $y = (0,5)^{x^2 - 4x}$, o valor máximo de y é:

a) 1
b) 4
c) 8
d) 16
e) 32

47. (UF-PI) O valor mínimo da função real f, de variável real, definida por $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{4x - x^2}$, é:

a) $\frac{1}{243}$
b) $\frac{1}{81}$
c) $\frac{1}{27}$
d) $\frac{1}{9}$
e) $\frac{1}{3}$

48. (UF-CE) Sejam *f* e *g* funções reais de variável real definidas por $f(x) = \dfrac{17}{2^x + 1}$ e $g(x) = 3 + 2x - x^2$. O valor mínimo de $f(g(x))$ é:

a) $\dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{1}{3}$

c) $\dfrac{1}{2}$

d) 1

e) 2

49. (PUC-MG) Sendo $f(x) = 2^x$, a expressão $[f(x + y) - f(x)] / y$ é igual a:

a) $\dfrac{(2^y - 1) \cdot 2^x}{y}$

b) $\dfrac{(2^x - 1) \cdot 2^y}{y}$

c) $\dfrac{2^x - 2^y}{y}$

d) $\dfrac{2^x + y}{y}$

e) 1

50. (Puccamp-SP) Seja *f* a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$.
O valor de $[f(x + 1) + f(x + 2) + f(x + 3)]/[f(x + 4) + f(x + 5)]$ é:

a) $\dfrac{39}{16}$

b) $\dfrac{21}{16}$

c) $\dfrac{5}{12}$

d) $\dfrac{7}{24}$

e) $\dfrac{1}{8}$

51. (Mackenzie-SP) Na igualdade $2^x + y^2 = 8$, com *x* e *y* inteiros e positivos, se *x* assumir o menor valor possível, então $\sqrt[y]{x}$ estará no intervalo:

a) [1, 2[

b) [2, 3[

c) [3, 4[

d) [4, 5[

e) [5, 6]

52. (U. E. Londrina-PR) Considere a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5^x + 3$. Seu conjunto imagem é:

a) $]-\infty; 3[$

b) $]-\infty; 5[$

c) $[3; 5]$

d) $]3; +\infty[$

e) $]5; +\infty[$

53. (ITA-SP) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = -3a^x$, onde *a* é um número real, $0 < a < 1$.
Sobre as afirmações

I) $f(x + y) = f(x)\,f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

II) *f* é bijetora.

III) *f* é crescente e $f(\,]0, +\infty[\,) =]-3, 0[$.

podemos concluir que:

a) todas as afirmações são falsas.

b) todas as afirmações são verdadeiras.

c) apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

d) apenas a afirmação II é verdadeira.

e) apenas a afirmação III é verdadeira.

54. (Fuvest-SP) A equação $2^x = -3x + 2$, com x real:

a) não tem solução.

b) tem uma única solução entre 0 e $\frac{2}{3}$.

c) tem uma única solução entre $-\frac{2}{3}$ e 0.

d) tem duas soluções, sendo uma positiva e outra negativa.

e) tem mais de duas soluções.

55. (ITA-SP) A soma das raízes reais positivas da equação $4^a - 5 \cdot 2^a + 4 = 0$, sendo $a = x^2$, vale:

a) 2
b) 5
c) $\sqrt{2}$
d) 1
e) $\sqrt{3}$

56. (Mackenzie-SP) A solução real k da equação $(3 \cdot 9^x - 15^x)/25^x = 2$ é:

a) tal que $5^k = \sqrt{k}$.
b) um elemento de $\mathbb{R}_-$.
c) um elemento de $\{-5; -3; 2; 3; 5\}$.
d) tal que $k \geq 2$.
e) tal que $0 < k < 2$.

57. (UF-AM) Seja k o menor número real que é a solução da equação $(0,3)^{x^2-2} : (0,09) = \left(\frac{1}{0,027}\right)^{-x}$.
Então, $\sqrt{k}$ é um número:

a) primo.
b) par.
c) não real.
d) irracional.
e) divisível por 3.

58. (Mackenzie-SP) Em $2^x y + 4 + 2^{-x} y = 0$, $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, existem k valores de x tais que y é inteiro. O valor de k é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

59. (ITA-SP) Considere a função $f: \mathbb{Z} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3^{x-2}}\,(9^{2x+1})^{\frac{1}{2x}} - (3^{2x+5})^{\frac{1}{x}} + 1$.
A soma de todos os valores de x para os quais a equação $y^2 + 2y + f(x) = 0$ tem raiz dupla é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 4
e) 6

60. (PUC-PR) Resolvendo a equação $3^{2x+3} - 3^{2x+2} + 2 \cdot 3^{2x} = 2^{2x+5} - 2^{2x+1}$, temos que x é igual a:

a) 1
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{3}{2}$
d) 2
e) 3

61. (U. E. Ponta Grossa-PR) Sobre as funções $f(x) = 2^{x^2-4x} - \frac{1}{8}$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$ e $h(x) = x - 2$, calcule a soma dos números associados às alternativas corretas:

(01) $f(x)$ e $g(x)$ têm as mesmas raízes.
(02) $g(x)$ é crescente para $x > 2$.
(04) $h\,[g\,(-1)] = 6$
(08) $g(x) > 0$ para $x < 1$ ou $x > 3$.
(16) $h(x)$ é crescente somente para $x > 2$.

62. (UF-MG) O valor de x que satisfaz a equação $2^{4x} - 6(2^{2x}) = 16$ é tal que:

a) $1 < x \leq 2$
b) $2 < x \leq 3$
c) $3 < x \leq 4$
d) $4 < x \leq 5$

63. (UF-MG) Suponha que a equação $8^{ax^2 + bx + c} = 4^{3x + 5} \cdot 2^{5x^2 - x + 8}$ seja válida para todo número real x, em que a, b e c são números reais.
Então, a soma a + b + c é igual a:

a) $\frac{5}{3}$
b) $\frac{17}{3}$
c) $\frac{28}{3}$
d) 12

64. (Fuvest-SP) Seja $f(x) = 2^{2x + 1}$. Se a e b são tais que $f(a) = 4f(b)$, pode-se afirmar que:

a) $a + b = 2$
b) $a + b = 1$
c) $a - b = 3$
d) $a - b = 2$
e) $a - b = 1$

65. (UF-PI) Sejam x_1 e x_2 as soluções da equação exponencial $\left(\frac{4}{3}\right)^{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x^2 - 2x}$. O valor da soma $x_1 + x_2$ é:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{5}{2}$
d) $\frac{7}{2}$
e) $\frac{9}{2}$

66. (Mackenzie-SP) Se $3^{x + 2} + 9^{x + 1} = 12 \cdot 3^{x + 1}$, então $x - 2$ vale:

a) -2
b) -1
c) 2
d) 1
e) 0

67. (UMC-SP) Se x é um número real tal que $3^{4x} = 3^{4 + 3x}$, então o valor de $\sqrt{x - \sqrt{25 - x^2}}$ é igual a:

a) 3x
b) 2x
c) x
d) $\frac{x}{2}$
e) $\frac{x}{4}$

68. (Unifor-CE) O número real x que é solução da equação $\frac{3 - 9 \cdot 2^{4 - x}}{1 - 2 \cdot 3^{4 - x}} = 3$ é:

a) múltiplo de 5.
b) par.
c) múltiplo de 7.
d) ímpar.
e) irracional.

69. (Unirio-RJ) Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em gramas, que decresce em função do tempo t, em horas, de acordo com a fórmula:

$$m = -3^{2t} - 3^{t + 1} + 108$$

Assim sendo, o tempo máximo de que os cientistas dispõem para utilizar este material antes que ele se volatilize totalmente é:

a) inferior a 15 minutos.
b) superior a 15 minutos e inferior a 30 minutos.
c) superior a 30 minutos e inferior a 60 minutos.
d) superior a 60 minutos e inferior a 90 minutos.
e) superior a 90 minutos e inferior a 120 minutos.

70. (UF-GO) As curvas de logística são usadas na definição de modelos de crescimento populacional quando fatores ambientais impõem restrições ao tamanho possível da população, na propagação de epidemias e boatos em comunidades. Por exemplo, estima-se que decorridas t semanas, a partir da constatação da existência de uma forma de gripe, o número N de pessoas contaminadas (em milhares) é aproximadamente $N = \dfrac{20}{1 + 19 \times 10^{-0,5t}}$. De acordo com essa estimativa, pode-se afirmar que:

a) menos de 500 pessoas haviam contraído a doença quando foi constatada a existência da gripe.
b) menos de 6 mil pessoas haviam contraído a doença, decorridas duas semanas da constatação da existência da gripe.
c) são necessárias mais de quatro semanas para que 18 mil pessoas sejam infectadas.
d) o número de pessoas infectadas atingirá 20 mil.

71. (UCDB-MS) Certa substância radioativa de massa M_0, no instante $t = 0$, tende a se transformar em outra substância não radioativa.
Para cada instante $t \geq 0$, dado em segundos, a massa da substância radioativa restante obedece a lei $M(t) = M_0\, 3^{-2t}$.
Nessas condições, o tempo necessário, em segundos, para que a massa da substância radioativa seja reduzida a um terço da massa inicial é igual a:

a) 3
b) 2,5
c) 1,5
d) 1
e) 0,5

72. (Cefet-PR) Cientistas de um certo país, preocupados com as possibilidades cada vez mais ameaçadoras de uma "guerra biológica", pesquisam uma determinada bactéria, que cresce segundo a expressão $P(t) = \dfrac{256}{125} \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^{t+1}$, onde t representa o tempo em horas. Para obter-se uma população de 3 125 bactérias, será necessário um tempo, em horas, com valor absoluto no intervalo:

a)]0, 2]
b)]2, 4]
c)]4, 6]
d)]6, 8]
e)]8, 10]

73. (UMC-SP) O crescimento de uma cultura de bactérias obedece à função $N(t) = 600 \cdot 3^{kt}$, em que N é o número de bactérias no instante t, sendo t o tempo em horas. A produção tem início em $t = 0$. Decorridas 12 horas, há um total de 1 800 bactérias. O valor de k e o número de bactérias, após 24 horas do início da produção, são, respectivamente:

a) $\dfrac{1}{12}$ e 3 600.
b) $-\dfrac{1}{12}$ e -100.
c) $-\dfrac{1}{12}$ e 64.
d) 12 e 5 400.
e) $\dfrac{1}{12}$ e 5 400.

74. (Vunesp-SP) A trajetória de um salto de um golfinho nas proximidades de uma praia, do instante em que ele saiu da água ($t = 0$) até o instante em que mergulhou ($t = T$), foi descrita por um observador através do modelo matemático $h(t) = 4t - t \cdot 2^{0,2 \cdot t}$, com t em segundos, $h(t)$ em metros e $0 \leq t \leq T$. O tempo, em segundos, em que o golfinho esteve fora da água durante este salto foi:

a) 1
b) 2
c) 4
d) 8
e) 10

75. (U. F. Santa Maria-RS) Um piscicultor construiu uma represa para criar traíras. Inicialmente, colocou 1 000 traíras na represa e, por um descuido, soltou 8 lambaris. Suponha-se que o aumento das populações de lambaris e traíras ocorre, respectivamente, segundo as leis $L(t) = L_0\, 10^t$ e $T(t) = T_0\, 2^t$, onde L_0 é a população inicial de lambaris, T_0, a população inicial de traíras, e t, o número de anos que se conta a partir do ano inicial.
O número de lambaris será igual ao de traíras depois de quantos anos?

a) 30
b) 18
c) 12
d) 6
e) 3

76. (UF-SC) O par ordenado (x, y), solução do sistema $\begin{cases} 4^{x+y} = 32 \\ 3^{y-x} = \sqrt{3} \end{cases}$, é:

a) $\left(5, \frac{3}{2}\right)$
b) $\left(5, -\frac{3}{2}\right)$
c) $\left(3, \frac{2}{3}\right)$
d) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$
e) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

77. (Mackenzie-SP) Se $\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$, então x e y são os possíveis valores reais de t tais que:

a) $t^2 - 27t + 126 = 0$
b) $t^2 + 27t + 126 = 0$
c) $t^2 - 21t - 126 = 0$
d) $t^2 + 21t - 126 = 0$
e) $t^2 - 26t - 27 = 0$

78. (U. F. Viçosa-MG) Seja a função real $f(x) = a^x$, $a > 1$. O conjunto dos valores de x para os quais $f(x^2 - 3) > f(6)$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3\}$

79. (Cefet-MG) O conjunto solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \leq \left(\frac{1}{4}\right)$ é:

a) $(-\infty, 5]$
b) $[5, +\infty)$
c) $[-5, +\infty)$
d) $[4, +\infty)$
e) $(-\infty, -5]$

80. (Unicap-PE, adaptado) Julgue os itens abaixo. Nas proposições referentes a esta questão, x é um número real,

0) se $3^x \leq 243$, então $x \leq 5$.
1) se $0{,}3^x \leq 0{,}3^2$, então $x \leq 2$.
2) a função exponencial 2^x é sempre crescente.
3) se $a \leq b$, então $a^x \leq b^x$.
4) se $2^{3x-1} = 32^{2x}$, então $x = -\frac{1}{7}$.

81. (UF-ES) O conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $3^{x-3} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+3}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

82. (Mackenzie-SP) O maior valor inteiro pertencente ao conjunto solução da inequação $[(2^{x+2} - 2^{x+1})/2^{x-2}] < 0{,}25^x$ é:

a) -3
b) -2
c) -1
d) 1
e) 2

83. (U. E. Londrina-PR) A relação a seguir descreve o crescimento de uma população de microorganismos, sendo P o número de microorganismos, t dias após o instante 0.

$$P = 64\,000 \cdot (1 - 2^{-0{,}1t})$$

O valor de P é superior a 63 000 se, e somente se, t satisfazer à condição:

a) $2 < t < 16$
b) $t > 16$
c) $t < 30$
d) $t > 60$
e) $32 < t < 64$

84. (U. F. Viçosa-MG) Se $2^a \cdot x^2 + 4^{a+1} \cdot x + 8 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é *correto* afirmar que:

a) $a \leqslant \frac{1}{3}$
b) $a < \frac{1}{3}$
c) $a \geqslant \frac{1}{3}$
d) $a < 0$
e) $a > 1$

85. (UF-SE) A expressão $P(n) = 40 - 40 \cdot 2^{-0{,}34n}$ permite calcular o número de artigos que um operário recém-contratado é capaz de produzir diariamente, após n dias de treinamento. Para que esse operário produza pelo menos 30 artigos por dia, o menor valor inteiro de n é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

86. (Unirio-RJ) O conjunto solução da inequação $x^{2x} \geqslant x^{x+3}$, onde $x > 0$ e $x \neq 1$, é:

a) $]0, 1[\cup [3, +\infty[$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
c) $[3, +\infty[$
d) $\mathbb{R}$
e) $\varnothing$

87. (ITA-SP) Seja $S = [-2, 2]$ e considere as afirmações:

I) $\frac{1}{4} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^x < 6$, para todo $x \in S$.

II) $\frac{1}{\sqrt{(32 - 2^x)}} + \frac{1}{\sqrt{(32)}}$, para todo $x \in S$.

III) $2^{2x} - 2^x \leqslant 0$, para todo $x \in S$.

Então, podemos dizer que:

a) apenas I é verdadeira.
b) apenas III é verdadeira.
c) somente I e II são verdadeiras.
d) apenas II é falsa.
e) todas as afirmações são falsas.

Logaritmos

88. (PUC-MG) Considere a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_2 x$ e $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, sendo $a > b$. Se $f(ab) = 4$ e $a + b = 10$, o valor de $a - b$ é:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7

89. (Mackenzie-SP) Se $\log_i 6 = m$ e $\log_i 3 = p$, $0 < i \neq 1$, então o logaritmo de $\frac{i}{2}$ na base i é igual a:

a) $6m - 3p$
b) $m - p - 3$
c) $p - m + 1$
d) $m - p + 1$
e) $p - m + 6$

90. (UF-PI) Se $\log_3 x = 10$ e $\log_3 y = 30$, então o valor de $\sqrt{x} \cdot y^{\frac{2}{3}}$ é igual a:

a) 3
b) 3^{25}
c) 3^{-2}
d) $\frac{1}{3^{10}}$
e) 3^{40}

91. (ESPM-SP) Se $\log_{20} 4 = A$ e $\log_{20} 6 = B$, o valor do $\log_{20} 5$ é:

a) $\sqrt{A \cdot B}$
b) $\frac{A + B}{2}$
c) $\frac{A \cdot B}{2}$
d) $1 - A$
e) $1 - B$

92. (Mackenzie-SP) Se $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} = \frac{3}{2}$, $a > b > 0$, então log a é sempre igual a:

a) $2 + 3\log b$
b) $\log 5 + \log b$
c) $\frac{1}{5}\log b$
d) $5\log b$
e) $\log b^2$

93. (U. F. Ouro Preto-MG) Suponhamos que x, y e z sejam números reais, positivos e diferentes de 1. Assinale a opção *correta*:

a) $(x)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \log x$

b) $\log (x \cdot y)^n = (\log x + \log y)^n$

c) $\log\left(\frac{x^2 \cdot y^3}{z}\right) = \frac{(2 \cdot \log x + 3 \cdot \log y)}{\log z}$

d) $\log x = -\log\left(\frac{1}{x}\right)$

94. (UCDB-MS) Se $x = \log_2\left(\frac{3}{2}\right) + \log_2\left(\frac{4}{3}\right) + \log_2\left(\frac{5}{4}\right) + \ldots + \log_2\left(\frac{10}{9}\right)$, então x é igual a:

a) 2
b) $\log_2 5$
c) $\log_2 6$
d) 3
e) $\log_2 10$

95. (ESPM-SP) Sendo G e A, respectivamente, as médias geométrica e aritmética das raízes da equação $x^2 - 32x + 16 = 0$, o valor de $\log_G A$ é:

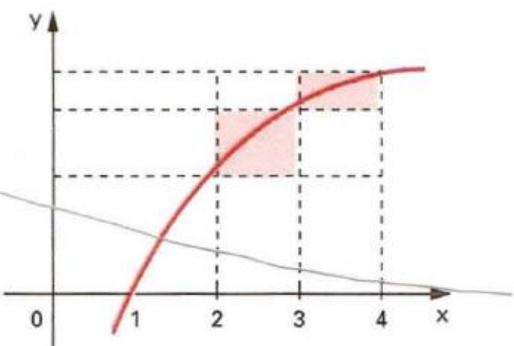
a) $\frac{1}{2}$
b) 1
c) $\frac{3}{2}$
d) 2
e) $\frac{5}{2}$

96. (FEI-SP) Se $m = \log_2 (a - b)$ e $n = \log_2 (a + b)$, então $\log_2 (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)$ vale:

a) $m + n$
b) m^4n^4
c) $2m + 2n$
d) m^2n^2
e) $m^2 + n^2$

97. (Mackenzie-SP) O produto $(\log_2 3) \cdot (\log_3 4) \cdot (\log_4 5) \cdot \ldots \cdot (\log_{63} 64)$ é igual a:

a) $\log_3 64$
b) $\log_2 63$
c) 2
d) 4
e) 6

98. (U. F. Ouro Preto-MG) Se $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ e $\log x = a + \frac{\log b}{2} - \log c$, então o valor de x é:

a) $\frac{10^a \cdot \sqrt{b}}{c}$
b) $\frac{a^{10} \cdot \sqrt{b}}{c}$
c) $\frac{10a \cdot \sqrt{b}}{c}$
d) $\frac{a \cdot \sqrt{b}}{c}$
e) $\frac{ab^2}{c}$

99. (Unip-SP) Se os números reais positivos a e b são tais que $\begin{cases} a - b = 48 \\ \log_2 a - \log_2 b = 2 \end{cases}$, calcule o valor de a + b.

a) 80
b) 16
c) 64
d) 78
e) 90

100. (Fuvest-SP) A curva da figura ao lado representa o gráfico da função $y = \log x$, para $x > 0$. Assim sendo, a área da região sombreada, formada pelos dois retângulos, é:

a) log 2
b) log 3
c) log 4
d) log 5
e) log 6

101. (FEI-SP) Se $A = \log_2 x$ e $B = \log_2 \frac{x}{2}$, então $A - B$ é igual a:

a) 1
b) 2
c) −1
d) −2
e) 0

102. (ITA-SP) Sendo dados $\ell n\left(2\sqrt{4}\,\sqrt[3]{6}\,\sqrt[4]{8} \ldots \sqrt[n]{2n}\right) = a_n$ e $\ell n\left(\sqrt{2}\,\sqrt[3]{3}\,\sqrt[4]{4} \ldots \sqrt[2n]{2n}\right) = b_n$, então $\frac{\ell n\, 2}{2} - \frac{\ell n\, 3}{3} + \frac{\ell n\, 4}{4} - \frac{\ell n\, 5}{5} + \ldots + \frac{\ell n\, 2n}{2n}$ é igual a:

a) $a_n - 2b_n$
b) $2a_n - b_n$
c) $a_n - b_n$
d) $b_n - a_n$
e) $a_n + b_n$

103. (Mackenzie-SP) Se $\log \alpha = 6$ e $\log \beta = 4$, então $\sqrt[4]{\alpha^2 \cdot \beta}$ é igual a:

a) β
b) 24
c) 10
d) $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4}$
e) $\sqrt{6}$

104. (Puccamp-SP) Se $\left(2\sqrt{2}\right)^x = 64$, o valor do logaritmo $\log_{\frac{1}{8}} x$ é:

a) −1
b) $-\frac{5}{6}$
c) $-\frac{2}{3}$
d) $\frac{5}{6}$
e) $\frac{2}{3}$

105. (Unifor-CE) Se $16 \cdot 4^x = 7^{y+3}$, então quando $y = -3$ o valor de $\log_{16} 2x^2$ é:

a) 4
b) $\frac{5}{2}$
c) 2
d) 1
e) $\frac{3}{4}$

106. (PUC-MG) Na expressão $\log E = \frac{1}{2} \log a - \frac{2}{3} \log b + \frac{1}{2} \log (a + b) - \frac{1}{3}(a - b)$, $a = 4$ e $b = 2$, o valor de E é:

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt[3]{2}$
c) $\sqrt[3]{6}$
d) $\sqrt{6}$
e) $\sqrt[3]{9}$

107. (U. F. Santa Maria-RS) Considere as afirmativas:

I) Se $\log_3 (x + y) = a$ e $x - y = 9$, então $\log_3 (x^2 - y^2) = a + 2$.
II) Seja $g(x) = a^x$ a função exponencial de base a com $0 < a < 1$. Para $x_1 < x_2$, tem-se $g(x_1) < g(x_2)$.
III) Se $f(x) = 3^x$, $x \in \mathbb{R}$, então $f(a + 1) - f(a) = 2\,f(a)$.

Está(ão) correta(s):

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

108. (UF-CE) Sejam $\log_a m = p$ e $\log_a n = q$. Se $p + q = \log_a x$ e $p - q = \log_a y$, o valor de m^2 é:

a) xy
b) x^2
c) y^2
d) $x - y$
e) $\frac{x}{y}$

109. (U. E. Londrina-PR) Quaisquer que sejam os números reais positivos *a*, *b*, *c*, *d*, *x* e *y*, a expressão $\log_2\left(\frac{a}{b}\right) + \log_2\left(\frac{b}{c}\right) + \log_2\left(\frac{c}{d}\right) - \log_2\left(\frac{ay}{dx}\right)$ pode ser reduzida a:

a) $\log_2\left(\frac{y}{x}\right)$
b) $\log_2\left(\frac{x}{y}\right)$
c) 1
d) 0
e) $\log_2\left(\frac{a^2y}{d^2x}\right)$

110. (Mackenzie-SP) Se $x^2 + 4x + 2\log_7 k^2$ é um trinômio quadrado perfeito, então o logaritmo de *k* na base 7k vale:

a) $\frac{1}{2}$
b) 2
c) -2
d) $-\frac{1}{2}$
e) $\frac{1}{7}$

111. (Mackenzie-SP) Se $\log_y 5 = 2x$, $0 < y \neq 1$, então $\frac{y^{3x} + y^{-3x}}{y^x + y^{-x}}$ é igual a:

a) $\frac{121}{25}$
b) $\frac{21}{125}$
c) $\frac{1}{25}$
d) $\frac{21}{5}$
e) $\frac{121}{5}$

112. (Vunesp-SP) Considere os números reais $a = \frac{1}{2}$, $b = \log_{\sqrt{2}} 2$, $c = \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Então:

a) $c < a < b$
b) $a < b < c$
c) $c < b < a$
d) $a < c < b$
e) $b < a < c$

113. (U. F. Santa Maria-RS) Seja $x > 1$. Se $x^3 = z$ e $z^4 = y$, então o valor de $\log_x y - \log_y x$ é:

a) $\frac{12}{7}$
b) $\frac{120}{12}$
c) $\frac{145}{12}$
d) 12
e) $\frac{143}{12}$

114. (U. E. Londrina-PR) O valor da expressão $\frac{\log_3 1 + \log 0{,}01}{\log_2 \frac{1}{64} \cdot \log_4 \sqrt{8}}$ é:

a) $\frac{4}{15}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{4}{9}$
d) $\frac{3}{5}$
e) $\frac{2}{3}$

115. (UE-CE) Se $a \cdot \log_3 a + b \cdot \log_3 b = 3$ e $a^a = 27$, então o valor de b^b é igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 27

116. (UE-CE) Se $\log_3 n = 6$, então $2\sqrt{n} + 3\sqrt[3]{n}$ é igual a:

a) 36
b) 45
c) 54
d) 81

117. (UF-MG) Seja $n = 8^{2\log_2 15 - \log_2 45}$.
Então, o valor de *n* é:

a) 5^2
b) 8^3
c) 2^5
d) 5^3

118. (Unifor-CE) Se x e y são números reais positivos tais que $y = 16^{\log_2 x}$, então x é igual a:

a) $\sqrt{y}$

b) $4y$

c) $2y$

d) $\sqrt[4]{y}$

e) $\frac{\sqrt[4]{y}}{2}$

119. (Mackenzie-SP) Considere a função $f(x) = x^{\frac{2}{\log x}}$, onde $0 < x \neq 1$. Então $\log\left[f\left(\sqrt{3}\right)\right]$ é igual a:

a) 3

b) 2

c) 100

d) $\sqrt{3}$

e) $10\sqrt{3}$

120. (Mackenzie-SP) O número real k, $k = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log 5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\log 2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\log 3}$, está no intervalo:

a) [0, 1[

b) [1, 2[

c) [2, 3[

d) [3, 4[

e) [4, 5]

121. (Mackenzie-SP) A partir dos valores de A e B, $A = 3^{\log_7 5}$ e $B = 5^{\log_7 3}$, podemos concluir que:

a) $A = \frac{B}{3}$

b) $A = B$

c) $B = \frac{A}{3}$

d) $\frac{A}{3} = \frac{B}{5}$

e) $\frac{A}{5} = \frac{B}{3}$

122. (UF-MG) Seja $y = 4^{\log_2 7} + \log_2 (8^7)$. Nesse caso, o valor de y é:

a) 35

b) 56

c) 49

d) 70

123. (UF-AL) Se $\log_2 5 = x$ e $y = 2^{2x+1}$, então y é igual a:

a) 50

b) 25

c) 15

d) 10

e) 5

124. (UF-AM) Sendo $2^n = 5$, então $\log_{50} 4$ em função de n é igual a:

a) $\frac{2}{1+n}$

b) $\frac{1}{1+2n}$

c) $\frac{1}{1+n}$

d) $\frac{2}{1+2n}$

e) $\frac{2}{2+n}$

125. (Fatec-SP) Se $\log 2 = 0{,}3$, então o valor do quociente $\frac{\log_5 32}{\log_4 5}$ é igual a:

a) $\frac{30}{7}$

b) $\frac{7}{30}$

c) $\frac{49}{90}$

d) $\frac{90}{49}$

e) $\frac{9}{49}$

126. (ITA-SP) O valor de $y \in \mathbb{R}$ que satisfaz a igualdade $\log_y 49 = \log_{y^2} 7 + \log_{2y} 7$ é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) 3

d) $\frac{1}{8}$

e) 7

127. (Puccamp-SP) Sabe-se que $16^x = 9$ e $\log_3 2 = y$. Nessas condições, é verdade que:

a) $x = 2y$

b) $y = 2x$

c) $x \cdot y = \frac{1}{2}$

d) $x - y = 2$

e) $x + y = 4$

128. (Mackenzie-SP) Em $\log_y 1\,000 = 2\log_x 10$, $0 < y \neq 1$, x vale:

a) $\sqrt[3]{y}$

b) $\sqrt{y}$

c) $\sqrt[3]{y^2}$

d) y^2

e) y^3

129. (Mackenzie-SP) Se $\left(\frac{1}{\log_2 x}\right) + \left(\frac{1}{\log_3 x}\right) + \left(\frac{1}{\log_6 x}\right) = 2$, x^2 vale:

a) 25

b) 36

c) 16

d) 81

e) 100

130. (UE-CE) Seja k um número real positivo e diferente de 1. Se $(2^{k-1})^3 = \left(\log_{\sqrt{5}} k\right)(\log_k 5)$, então $15k + 7$ é igual a:

a) 17

b) 19

c) 27

d) 32

131. (U. E. Londrina-PR) Se $\log_3 7 = a$ e $\log_5 3 = b$, então $\log_5 7$ é igual a:

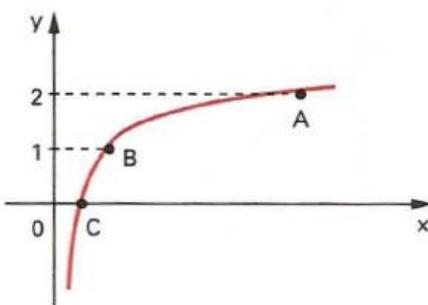
a) $a + b$

b) $a - b$

c) $\frac{a}{b}$

d) $a \cdot b$

e) a^b

132. (UF-CE) Se $\log_7 875 = a$, então $\log_{35} 245$ é igual a:

a) $\frac{a+2}{a+7}$

b) $\frac{a+2}{a+5}$

c) $\frac{a+5}{a+2}$

d) $\frac{a+7}{a+2}$

e) $\frac{a+5}{a+7}$

133. (Mackenzie-SP) O valor de $\log_x (\log_3 2 \cdot \log_4 3)$, sendo $x = \sqrt{2}$, é:

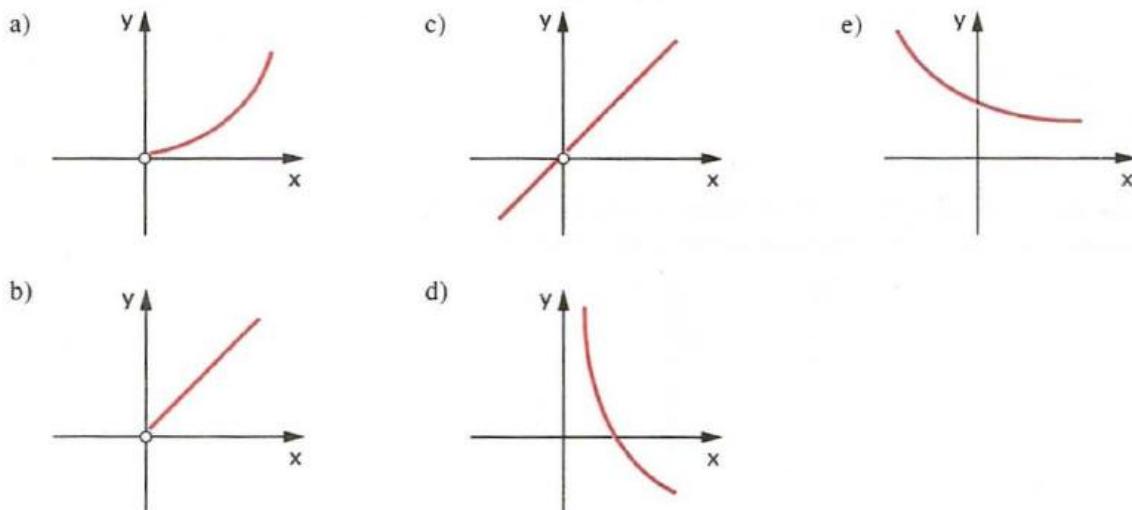
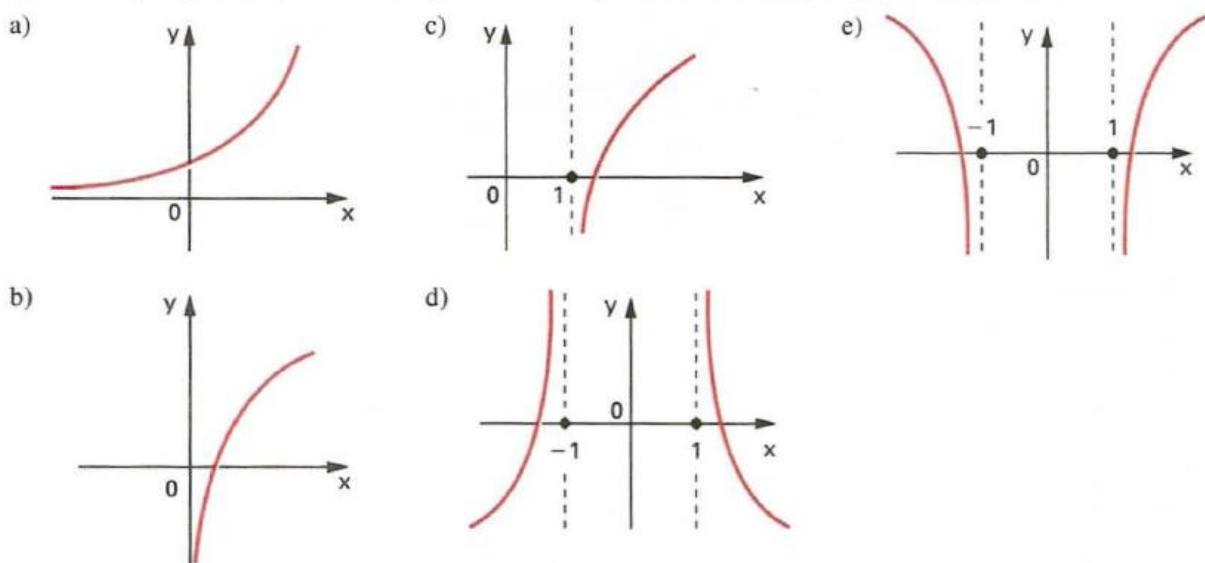
a) 2

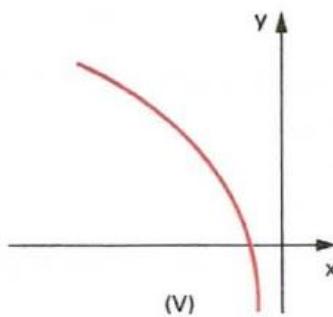
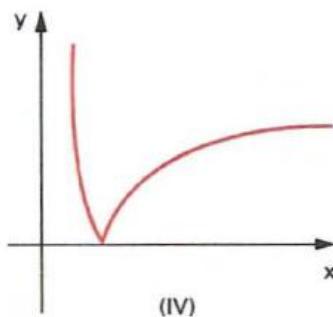
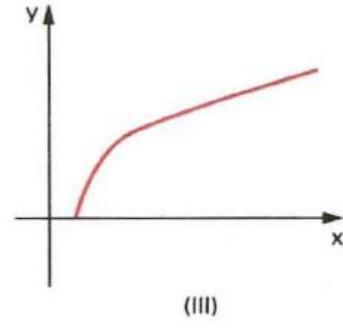
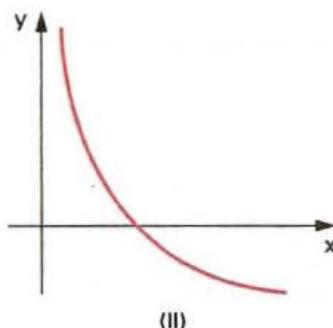
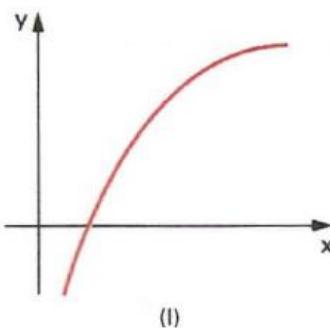
b) $\frac{1}{2}$

c) $-\frac{1}{2}$

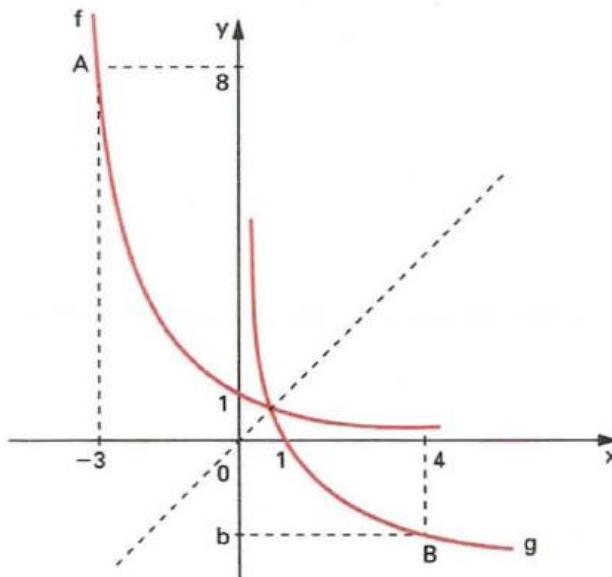
d) -2

e) $\frac{3}{2}$

Função logarítmica

134. (U. F. Juiz de Fora-MG) A figura abaixo é um esboço, no plano cartesiano, do gráfico da função $f(x) = \log_n x$ com alguns pontos destacados.

Supondo que a abscissa do ponto *A* é igual a 9, é *incorreto* afirmar que:

a) a base *n* é igual a 3.
b) a abscissa de *C* é igual a 1.
c) $f(x) < 0$ para todo $x \in (0, 1)$.
d) a abscissa de *B* é igual a 2.
e) f(x) é crescente.

135. (UFR-RJ) O gráfico que melhor representa a função $f(x) = 2^{\log_2 x}$ é:

a)
b)
c)
d)
e)
136. (Unirio-RJ) O gráfico que melhor representa a função real definida por $f(x) = \ell n(|x| - 1)$ é:

a)
b)
c)
d)
e)

137. (UF-RS) Identifique os gráficos que correspondem a $y = \log x$ e $y = |\log x|$, nesta ordem.

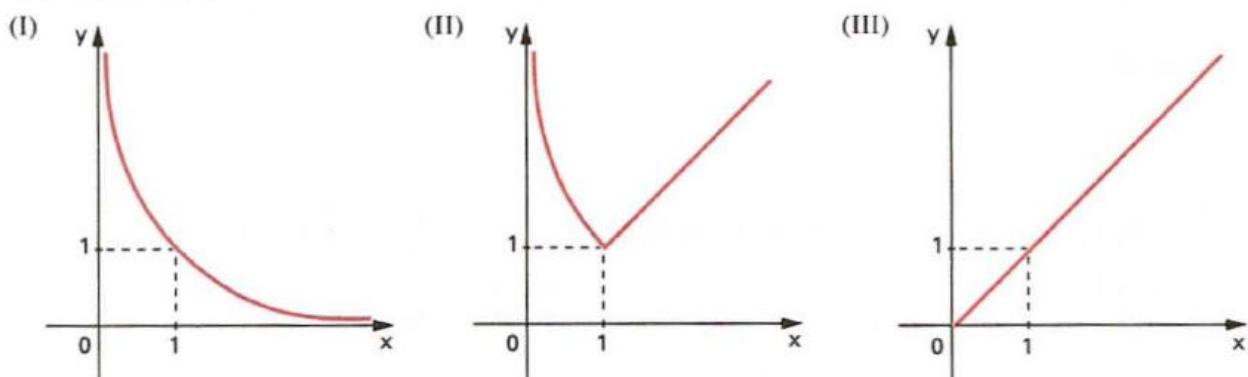
(I)

(II)

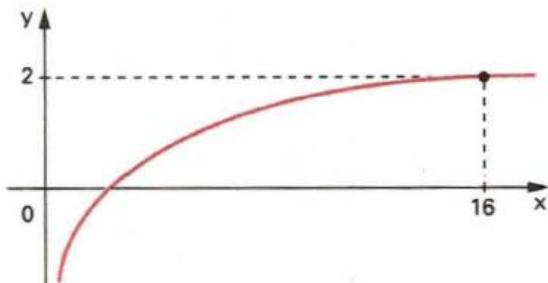
(III)

(IV)

(V)

a) I e II
b) I e III
c) I e IV
d) II e III
e) V e IV

138. (Unifor-CE) A função g: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é a função inversa da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$. Os pontos *A* e *B* pertencem, respectivamente, aos gráficos de *f* e *g*, como mostra a figura abaixo.

É verdade que $a \cdot b$ é igual a:

a) -2
b) -1
c) $-\frac{1}{2}$
d) $-\frac{1}{3}$
e) $-\frac{1}{12}$

139. (UF-RS) Considere as funções definidas por $f(x) = 10^{\log x}$, $g(x) = 10^{-\log x}$, $h(x) = 10^{|\log x|}$ e os gráficos I, II e III, abaixo.

(I)

(II)

(III)

A alternativa que associa corretamente cada função a seu gráfico é:

a) f — I; g — I; h — I
b) f — I; g — III; h — II
c) f — II; g — I; h — III
d) f — III; g — I; h — II
e) f — III; g — II; h — I

140. (UF-MG) Observe a figura abaixo.

Nela, está representado o gráfico de $f(x) = \log_n x$.
O valor de f(128) é:

a) $\frac{5}{2}$
b) 3
c) $\frac{7}{2}$
d) 7

141. (UF-SE) Se *f* é a função de R em R definida por $f(x) = \begin{cases} -2, \text{ se } x < -3 \\ 0, \text{ se } -3 \leqslant x < -1 \\ x + 1, \text{ se } -1 < x < 1 \\ x^2 - 2, \text{ se } 1 \leqslant x < 3 \\ x, \text{ se } x \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$, então:

a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$
b) $f\left(-\sqrt{2}\right) = -2$
c) $f(1^{100}) = 2$
d) $f(\log_3 2) = 1 + \log_3 2$
e) $f\left(-\frac{17}{3}\right) = 0$

142. (U. F. Viçosa-MG) Seja *f* a função real dada por $f(x) = \log(x^2 - 2x + 1)$. Então $f(-5) - f(5)$ é igual a:

a) $2\log\left(\frac{3}{2}\right)$
b) $2\log 11$
c) $4\log\left(\frac{3}{2}\right)$
d) $2\log\left(\frac{2}{3}\right)$
e) $\log 20$

143. (UF-CE) Considere a função real de variável real, definida por $f(x) = 3 + 2^{-x}$. Então $f(\log_2 5)$ é igual a:

a) $\frac{4}{5}$
b) $\frac{8}{5}$
c) $\frac{12}{5}$
d) $\frac{16}{5}$
e) 4

144. (U. F. Juiz de Fora-MG) O domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função $f(x) = \frac{\ell n(x^2 - 3x + 2)}{\sqrt{e^x - 1}}$ é:

a) $[0, 1) \cup (2, \infty)$
b) $(0, 1) \cup (2, \infty)$
c) $(0, \infty)$
d) $(0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

145. (U. F. Ouro Preto-MG) Se $f(x) = \sqrt{\log\left(2 - \frac{1}{x}\right)}$, então o domínio de *f* é:

a) $]1, +\infty[$
b) $]0, +\infty[$
c) $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
d) $]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$
e) $]-\infty, 1[$

146. (Puccamp-SP) O mais amplo domínio real da função dada por $f(x) = \log_{x-2}(8 - 2^x)$ é o intervalo:

a) $]2, 3[$
b) $]3, +\infty[$
c) $]2, +\infty[$
d) $]-\infty, 3[$
e) $]-\infty, 2[$

147. (UE-CE) O domínio da função real $f(x) = \log_3\left(4^x - \sqrt{2^{x+1}}\right)$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x > \frac{1}{3}\right\}$
b) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x > \frac{1}{2}\right\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x > \frac{2}{3}\right\}$
d) $\{x \in \mathbb{R};\ x > 1\}$

148. (U. E. Londrina-PR) Considere as funções *f* e *g*, de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_2 2x$. É verdade que, para todo *x* do domínio, tem-se $g(x)$ igual a:

a) $2 \cdot f(x)$
b) $2 + f(x)$
c) $1 + f(x)$
d) $f(x)$
e) $[f(x)]^2$

149. (UF-AL, adaptado) Classifique como *V* ou *F* cada afirmativa abaixo.

1) $(\log_3 2) \cdot (\log_2 3) = 1$
2) Para todo *x* real, a função *f*, dada por $f(x) = 2^{-x}$, é crescente.
3) Se $4^x = 10$, então $x = \frac{1}{2 \cdot \log 2}$.
4) Se $y = \log_4(2 - x)$ é um número real, então *x* é um número real menor do que 2.
5) O gráfico da função real dada por $f(x) = 6^{x-2}$ intercepta o eixo das abscissas no ponto (2, 0).

150. (UF-BA) Considerando-se as funções reais $f(x) = \log_2(x - 1)$ e $g(x) = 2^x$, calcule a soma dos números associados à(s) alternativa(s) correta(s).

(01) Para todo *x* real, *x* pertence ao domínio da função *f* ou à imagem da função *g*.
(02) Os gráficos das funções *f* e *g* interceptam-se no ponto (1, 0).
(04) O domínio de $f \circ g$ é $\mathbb{R}_+^*$.
(08) O valor de $f(33) \cdot g(-3)$ é igual a $\frac{5}{8}$.
(16) A função inversa da função *f* é $h(x) = 2^x + 1$.

151. (Mackenzie-SP) Analisando os gráficos das funções de R em R definidas por $g(x) = -x^2 + x$ e $f(x) = 2^x$, considere as afirmações a seguir.

I) $f(x) > g(x), \forall x \in \mathbb{R}$

II) Não existe $x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)$.

III) $f(x)$ e $g(x)$ são inversíveis.

Então:

a) somente a I é verdadeira.

b) somente a II é verdadeira.

c) somente I e II são verdadeiras.

d) somente I e III são verdadeiras.

e) somente II e III são verdadeiras.

152. (UF-GO, adaptado) Considere as funções $f(x) = n^x$ e $g(x) = \log_n x$, com $0 < n \neq 1$. Assim, é *falsa* a afirmação:

a) Se $n > 1$, então ambas as funções são crescentes.

b) As funções compostas $f(g(x))$ e $g(f(x))$ são iguais.

c) O domínio de f é o conjunto imagem de g.

d) Se $0 < n < 1$, então a equação $f(x) = g(x)$ possui solução.

153. (UF-BA) Considerando-se as funções $f(x) = x - 4$, $g(x) = x^2 - 5x + 6$, calcule a soma dos números associados à(s) alternativa(s) correta(s).

(01) Todos os zeros de $g(x)$ estão contidos no domínio de $h(x) = \log(x^2 - 4)$.

(02) A sentença que define $(f \circ g)(x)$ é $x^2 - 5x + 2$.

(04) $g(x)$ é crescente, para todo $x \in [3, +\infty[$.

(08) O gráfico de $f(x)$ intercepta os eixos coordenados no ponto $(0, 0)$.

(16) $(g \circ f)(x)$ é função bijetora em $\mathbb{R}$.

(32) Os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ se interceptam nos pontos $(0, -4)$, $(1, 2)$.

(64) O conjunto imagem da função $t(x) = 2^a$, sendo $a = f(x)$ é $\mathbb{R}_+^*$.

154. (Mackenzie-SP) Se f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ é uma função definida por $f(x) = \log_2 x$, então a igualdade $f^{-1}(x + 1) - f^{-1}(x) = 2$ se verifica para x igual a:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\sqrt{2}$

d) 1

e) 2

155. (UF-PE, adaptado) Sejam as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dadas respectivamente por $f(x) = 5^x$ e $g(x) = \log_5 x$, classifique como *V* ou *F* as afirmativas a seguir.

a) $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) g é sobrejetora.

c) $g(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$

d) $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = 5$

e) Se a e b são reais e $a < b$, então $f(a) < f(b)$.

156. (Unifor-CE) Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 3^{-x}$.
É verdade que:

a) a função inversa de f é dada por $f^{-1}(x) = \log_3 \frac{1}{x}$.

b) $f^{-1}(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

c) f é crescente em $\mathbb{R}$.

d) f é ímpar.

e) $f(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

157. (Mackenzie-SP) Com relação a função real definida por $f(x) = \log_2 (1 - x^2)$ de $]-1, 1[$ em $\mathbb{R}_-$, considere as afirmações:

I) f(x) é sobrejetora.

II) f(x) é uma função par.

III) $f\left(\frac{7}{8}\right) < f\left(\frac{-1}{2}\right)$

Então:

a) todas são verdadeiras.
b) todas são falsas.
c) somente a I é verdadeira.
d) somente I e II são verdadeiras.
e) somente II e III são verdadeiras.

Equações exponenciais e logarítmicas

158. (PUC-RS) A solução real para a equação $n^{x+1} = \frac{b}{n}$, com $n > 0$, $n \neq 1$ e $b > 0$, é dada por:

a) $\log_n (b)$
b) $\log_n (b + 1)$
c) $\log_n (b) + 1$
d) $\log_n (b) + 2$
e) $\log_n (b) - 2$

159. (Mackenzie-SP) Se $4^x = 3$ e $4^y = 9$, então $(0{,}125)^{-4x + 2y}$ vale:

a) 1
b) 2
c) 4
d) $\log_4 3$
e) $\log_4 9$

160. (ITA-SP) Se $a \in \mathbb{R}$ é tal que $3y^2 - y + a = 0$ tem raiz dupla, então a solução da equação $3^{2x+1} - 3^x + a = 0$ é:

a) $\log_2 6$
b) $-\log_2 6$
c) $\log_3 6$
d) $-\log_3 6$
e) $1 - \log_3 6$

161. (Cefet-MG) A equação exponencial $9^x - 2 \cdot 3^x = 0$ admite:

a) uma raiz nula.
b) duas raízes reais.
c) apenas raiz complexa.
d) uma raiz real positiva.
e) uma raiz real negativa.

162. (FGV-SP) Adotando-se os valores $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, a raiz da equação $5^x = 60$ vale aproximadamente:

a) 2,15
b) 2,28
c) 41
d) 2,54
e) 2,67

163. (U. E. Londrina-PR) A equação $2 - \log x = \log (3x + 5)$:

a) admite uma única solução real.
b) admite duas soluções reais positivas.
c) não admite soluções reais positivas.
d) admite duas soluções reais de sinais contrários.
e) não admite soluções reais.

164. (PUC-MG) A soma das raízes da equação $\log_2 2^{x^2 - 3x + 5} = 3$ é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

165. (PUC-RS) O conjunto solução da equação $x\log (x) = 0$ em $\mathbb{R}$ é:

a) $\{\}$
b) $\{0\}$
c) $\{1\}$
d) $\{0, 1\}$
e) $(0, 1)$

166. (Cefet-MG) A solução da equação $\log_7 (x + 2) + \log_7 (x - 3) = \log_7 6$ é formada por:

a) um número par.
b) dois números pares.
c) dois números ímpares.
d) um número fracionário.
e) um número par e um número ímpar.

167. (UF-ES) Dada uma constante real *a*, a equação $2^x = a3^x$, considerada no conjunto dos números reais:

a) tem solução positiva se $a > 1$.
b) tem solução negativa se $a < 0$.
c) tem solução positiva se $0 < a < 1$.
d) tem solução negativa se $0 < a < 1$.
e) só tem solução se $a = 1$.

168. (U. F. Juiz de Fora-MG) Sendo *x* um número real positivo, podemos afirmar que os gráficos das funções $f(x) = \log (2x)$ e $g(x) = 2\log x$:

a) não têm pontos em comum.
b) são iguais.
c) têm um único ponto em comum.
d) têm apenas dois pontos em comum.

169. (Unirio-RJ) O conjunto solução da equação $\log_4 x + \log_x 4 = \frac{5}{2}$, sendo $U = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, é tal que a soma de seus elementos é igual a:

a) 0
b) 2
c) 14
d) 16
e) 18

170. (U. F. Viçosa-MG) Se *x* e *y* são números naturais tais que $\log (x^2 + 17) = \log y^2$, então o produto $x \cdot y$ é igual a:

a) 72
b) 71
c) 75
d) 74
e) 76

171. (Puccamp-SP) Determine os valores reais de *x* que satisfazem a equação $\log [(\log x)^2 - \log x] = \log 2$. É correto afirmar que:

a) o maior deles é 1.
b) o menor deles é 5.
c) o produto deles é 10.
d) dividindo-se o maior pelo menor, obtém-se 20.
e) a soma deles é 101.

172. (Mackenzie-SP) Se *a* e *b* são reais, positivos e diferentes de 1, tais que $\log_a b - \frac{1}{2} \log b = 0$, então o valor de *a* é:

a) 2
b) $\sqrt{10}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{4}$
e) 100

173. (UF-SC) Um paciente de um hospital está recebendo soro por via intravenosa. O equipamento foi regulado para gotejar *x* gotas a cada 30 segundos. Sabendo-se que este número *x* é solução da equação $\log_4 x = \log_2 3$ e que cada gota tem volume de 0,3 mL, pode-se afirmar que o volume de soro que este paciente recebe em uma hora é de:

a) 800 mL
b) 750 mL
c) 724 mL
d) 500 mL
e) 324 mL

174. (Unicap-PE, adaptado) Julgue os itens abaixo. Nesta questão, *x* é um númem real estritamente positivo,

0) se $\log_3(\log_2 x) = 1$, então $x = 8$.

1) se $f(x) = \log_2(1 - 2x)$, então $x > \frac{1}{2}$.

2) se $(2^x)^{x-1} = 4$, então $x = 2$ ou $x = -1$.

3) $3^{\log_3^7} = 7$

4) $e^{\ell n x} = x$

175. (Fatec-SP) A soma dos valores reais de *x* que satisfazem a equação $3 \cdot (\log x)^2 = \log_2 x$ é:

a) 0
b) 1
c) 3
d) 7
e) 9

176. (Cefet-MG) A solução *x* da equação $\log_2(16x^2) = 4\log_2 x + 3$ satisfaz:

a) $x < 0$
b) $0 < x < 1$
c) $1 < x < 2$
d) $2 \leq x \leq 4$
e) $x > 4$

177. (Cefet-PR) Seja a equação logarítmica $\log_m 2 \cdot \log_{\frac{m}{16}} 2 = \log_{\frac{m}{64}} 2$. A soma das raízes dessa equação é:

a) 12
b) 32
c) 4
d) 2
e) 14

178. (FGV-SP) O valor de *x* que satisfaz a equação $\log(2x + 7) = \log 2x + \log 7$ é um número:

a) menor que $\frac{1}{2}$.
b) entre $\frac{1}{2}$ e 1.
c) entre 1 e $\frac{3}{2}$.
d) entre $\frac{3}{2}$ e 2.
e) maior que 2.

179. (ITA-SP) Seja *S* o conjunto de todas as soluções reais da equação $\log_{\frac{1}{4}}(x + 1) = \log_4(x - 1)$.

Então:

a) *S* é um conjunto unitário e $S \subset]2, +\infty[$.
b) *S* é um conjunto unitário e $S \subset]1, 2[$.
c) *S* possui dois elementos distintos $S \subset]-2, 2[$.
d) *S* possui dois elementos distintos $S \subset]1, +\infty[$.
e) *S* é o conjunto vazio.

180. (Mackenzie-SP) A menor raiz da equação $\log_2 2^a - 2^b = 0$, sendo $a = x^2$ e $b = \log_2 2^x$, pertence ao intervalo:

a) $[-2, -1]$
b) $[-1, 0]$
c) $[0, 1]$
d) $[1, 2]$
e) $[2, 3]$

181. (Mackenzie-SP) Se $f(x + 2) = 12 \cdot 2^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, então a solução real da equação $f(x) - \log_2 |x| = 0$ pertence ao:

a) $[-3, -2]$
b) $[-2, -1]$
c) $[-1, 0]$
d) $[0, 1]$
e) $[1, 2]$

182. (FEI-SP) Quantas raízes reais possui a equação $\log |x| = x^2 - x - 20$?

a) nenhuma
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

183. (Mackenzie-SP) Se K é raiz da equação $\log_2 \sqrt{(2x)} + \log_4 (x - 4) = 3$, então $K + \log_2 (K - 4)$ é igual a:

a) 8 c) 16 e) 14
b) 12 d) 10

184. (PUC-SP) A energia nuclear, derivada de isótopos radiativos, pode ser usada em veículos espaciais para fornecer potência. Fontes de energia nuclear perdem potência gradualmente, no decorrer do tempo. Isso pode ser descrito pela função exponencial $P = P_0 \cdot e^{-\frac{t}{250}}$, na qual P é a potência instantânea, em watts, de radioisótopos de um veículo espacial; P_0 é a potência inicial do veículo; t é o intervalo de tempo, em dias, a partir de $t_0 = 0$; e é a base do sistema de logaritmos neperianos. Nessas condições, quantos dias são necessários, aproximadamente, para que a potência de um veículo espacial se reduza a quarta parte da potência inicial? (Dado: $\ln 2 = 0,693$.)

a) 336 c) 340 e) 346
b) 338 d) 342

185. (U. E. Londrina-PR) Se $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x = -6,25$, então x é igual a:

a) 8
b) 6
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{6}$
e) $\frac{1}{8}$

186. (U. E. Ponta Grossa-PE) Considerando que p é o produto das raízes da equação $\log^2 x - \log x - 6 = 0$ e que $m = \frac{(2^{-3})^p \cdot 4^{p-7}}{8^{-p}}$, calcule a soma dos números associados à(s) alternativa(s) correta(s).

(01) p é um número primo.
(02) p é um múltiplo de três.
(04) $\frac{p}{m} \in \mathbb{Z}$
(08) $60 < m < 70$
(16) $m > p$

187. (UE-RJ) O logaritmo decimal do número positivo x é representado por $\log x$.
Então, a soma das raízes de $\log^2 x - \log x^3 = 0$ é igual a:

a) 1 c) 1 000
b) 101 d) 1 001

188. (UF-MG) O valor de x que satisfaz à equação $2\log x + \log b - \log 3 = \log\left(\frac{9b}{x^4}\right)$, onde log representa o logaritmo decimal, pertence ao intervalo:

a) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$
b) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
c) $[1, 2]$
d) $[2, 3]$
e) $[3, 4]$

189. (U. F. São Carlos-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o modelo matemático $h(t) = 1,5 + \log_3 (t + 1)$, com $h(t)$ em metros e t em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte foi de:

a) 9 c) 5 e) 2
b) 8 d) 4

190. (PUC-PR) Se $\log(3x + 23) - \log(2x - 3) = \log 4$, encontrar x.

a) 4
b) 3
c) 7
d) 6
e) 5

191. (Mackenzie-SP) A soma das soluções reais da equação $\left|\log_2|x - 2|\right| = \frac{|x|}{x}$ é:

a) 8
b) 10
c) 6
d) 4
e) 2

192. (Unirio-RJ) Seja a função definida por $f(x) = \log_2[(x + 1)/2x]$. O valor de x para o qual $f(x) = 1$ é tal que:

a) $0 < x < \frac{1}{100}$
b) $\frac{1}{100} < x < \frac{1}{10}$
c) $\frac{1}{10} < x < \frac{1}{5}$
d) $\frac{1}{5} < x < \frac{3}{10}$
e) $x > \frac{3}{10}$

193. (ITA-SP) Se (x_0, y_0) é uma solução real do sistema $\begin{cases} \log_2(x + 2y) - \log_3(x - 2y) = 2 \\ x^2 - 4y^2 = 4 \end{cases}$, então $x_0 + y_0$ é igual a:

a) $\frac{7}{4}$
b) $\frac{9}{4}$
c) $\frac{11}{4}$
d) $\frac{13}{4}$
e) $\frac{17}{4}$

194. (Fuvest-SP) Se (x, y) é solução do sistema $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = \frac{3}{4} \\ y^3 - \frac{1}{2}xy^2 = 0 \end{cases}$, pode-se afirmar que:

a) $x = 0$ ou $x = -2 - \log_2 3$
b) $x = 1$ ou $x = 3 + \log_2 3$
c) $x = 2$ ou $x = -3 + \log_2 3$
d) $x = \frac{\log_2 3}{2}$ ou $x = -1 + \log_2 3$
e) $x = -2 + \log_2 3$ ou $x = -1 + \frac{\log_2 3}{2}$

195. (Cefet-PR) Se a e b são soluções do sistema $\begin{cases} 2^x = \frac{1}{2^{y-10}} \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$, então $2^a + 2^b$ é igual a:

a) 64
b) 260
c) 514
d) 136
e) 80

196. (U. F. Viçosa-MG) Sabendo-se que $\log_x 5 + \log_y 4 = 1$ e $\log_x y = 2$, o valor de $x + y$ é:

a) 120
b) 119
c) 100
d) 110
e) 115

Inequações exponenciais e logarítmicas

197. (Cefet-MG) O conjunto domínio da função real definida por $f(x) = \sqrt{\log(x - 1)}$ é dado por:

a) $x > 1$
b) $x \geqslant 1$
c) $x > 0$
d) $x > 2$
e) $x \geqslant 2$

198. (UF-SE) Se S é o conjunto solução da inequação $0 < \log_{\sqrt{2}} (3x + 1) < 8$, então:

a) $S \subset [0, 3]$

b) $S \subset \left]-\frac{1}{3}, 3\right]$

c) $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[\supset S$

d) $\left]-\frac{1}{3}, 2\right[\supset S$

e) $S = \left]-\frac{1}{3}, 5\right[$

199. (UF-PI) O conjunto solução da inequação $x\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) < 3\log_{10}\left(\frac{1}{4}\right) - \log_{10}\left(\frac{1}{4^x}\right)$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R};\ 1 < x < 2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R};\ x < 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R};\ x > 2\}$

d) $\{x \in \mathbb{R};\ 1 < x < 4\}$

e) $\{x \in \mathbb{R};\ x > 4\}$

200. (ESPM-SP) Seja $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{5}x\right)}$. O maior valor inteiro de x para que y seja um número real é:

a) 5
b) 4
c) 3
d) 2
e) 1

201. (ITA-SP) Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Para que $]4, 5[= \left\{x \in \mathbb{R}_+^*;\ \log_{\frac{1}{a}}\left(\log_a\left(x^2 - 15\right)\right) > 0\right\}$, o valor de a é:

a) 2
b) 3
c) 5
d) 9
e) 10

202. (ITA-SP) A inequação $4x\log_5 (x + 3) \geq (x^2 + 3) \log_{\frac{1}{5}} (x + 3)$ é satisfeita para todo $x \in S$. Então:

a) $S =]-3, -2] \cup [-1, +\infty[$

b) $S =]-\infty, -3[\cup [-1, +\infty[$

c) $S =]-3, -1]$

d) $S =]-2, +\infty]$

e) $S =]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$

203. (Mackenzie-SP)

$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2} - 3\right)}$$

Na igualdade anterior, supondo x o maior valor inteiro possível, então, neste caso, x^y vale:

a) 4x
b) 1
c) 8x
d) 2
e) 2x

204. (PUC-SP) Dados $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, um número real k é solução da inequação $16^{10x^2} < 12$ se, e somente se:

a) $k > -3$ e $k \neq 0{,}3$

b) $k < -0{,}3$ ou $k > 0{,}3$

c) $k < -3$ ou $k > 3$

d) $-3 < k < 3$

e) $-0{,}3 < k < 0{,}3$

205. (UE-CE) Sejam $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, $V_1 = \left\{x \in \mathbb{Z};\ 1 - 2\log_7 \sqrt{(x+3)} > 0\right\}$ e

$$V_2 = \left\{x \in \mathbb{Z};\ \frac{7^x}{\sqrt{7}} - \frac{\left(\sqrt{7}\right)^x}{7} \geq 0\right\}.$$

O número de elementos do conjunto $V_1 \cap V_2$ é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

206. (Mackenzie-SP) Na desigualdade $\sqrt{(x-1)^2} + x > k$, x e k são números reais. Então k pode ser:

a) $\log_5 2$
b) $\log_2 5$
c) π
d) $\frac{\pi}{2}$
e) 2,7

207. (Fatec-SP) Seja f a função quadrática definida por $f(x) = x^2 + x \cdot \log_3 m + 1$. Então, $f(x) > 0$, para todo x real, se e somente se, os valores reais de m satisfazem:

a) $m > \frac{1}{9}$
b) $m > 6$
c) $\frac{1}{6} < m < 27$
d) $0 < m < \frac{1}{9}$
e) $\frac{1}{9} < m < 9$

208. (ITA-SP) Dada a função quadrática $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{2}{3}\right) + x \ln 6 - \left(\frac{1}{4}\right) \ln\left(\frac{3}{2}\right)$, temos que:

a) a equação $f(x) = 0$ não possui raízes reais.
b) a equação $f(x) = 0$ possui duas raízes reais distintas e o gráfico f possui concavidade para cima.
c) a equação $f(x) = 0$ possui duas raízes reais iguais e o gráfico de f possui concavidade para baixo.
d) o valor máximo de f é $\frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$.
e) o valor máximo de f é $2 \frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$.

209. (Mackenzie-SP) O menor valor inteiro de x tal que $9^{\log_3 x} \cdot 3^{\log_9 x} > 1$ é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 6
e) 9

210. (Mackenzie-SP) Assinale, entre as alternativas a seguir, um possível valor real de x tal que $x^a \cdot \log_3 x < 1$, sendo $a = \frac{1}{\log_3 x}$.

a) $\frac{2\pi}{3}$
b) $\frac{7}{3}$
c) 3
d) $\frac{5}{4}$
e) $\log_2 5$

211. (Mackenzie-SP) Relativamente às afirmações

I) $\log_2 3 > \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{9}$

II) $2^{\log_4 15} = \sqrt{15}$

III) $\log_{\frac{1}{3}} 9 < \log_{\frac{1}{3}} 5$

assinale:

a) se somente III estiver correta.
b) se somente I e III estiverem corretas.
c) se somente II e III estiverem corretas.
d) se somente I e II estiverem corretas.
e) se somente II estiver correta.

212. (Vunesp-SP) Sejam *x*, *y* números reais. Se $x > 0$, $x \neq 1$ e $\log_x 10 > \log_x (10)^y$, então:

a) $y < 0$
b) $y > 1$ e $x > 1$
c) $y < 1$ e $x < 1$
d) $y < 1$ e $x > 1$ ou $y > 1$ e $x < 1$
e) $y > 0$

213. (ITA-SP) Dado um número real *a* com $a > 1$, seja *S* o conjunto solução da inequação

$$\log_{\frac{1}{a}} \log_a \left(\frac{1}{a}\right)^{x-7} \leqslant \log_{\frac{1}{a}} (x - 1).$$

Então *S* é o intervalo:

a) $[4, +\infty[$
b) $[4, 7[$
c) $]1, 5]$
d) $]1, 4]$
e) $[1, 4[$

214. (Fuvest-SP) Seja $f(x) = \log_3 (3x + 4) - \log_3 (2x - 1)$. Os valores de *x*, para os quais *f* está definida e satisfaz $f(x) > 1$, são:

a) $x < \frac{7}{3}$
b) $\frac{1}{2} < x$
c) $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}$
d) $-\frac{4}{3} < x$
e) $-\frac{4}{3} < x < \frac{1}{2}$

215. (Mackenzie-SP)

I) Se $k = \log_3 14 \cdot \log_{\frac{2}{5}} 3 \cdot \log_4 \frac{2}{5}$, então $1 < k < 2$.

II) Se $\log_2 \left(\sqrt{6} - 2\right) = k$, então $\log_2 \left(\sqrt{6} + 2\right) = 1 - k$.

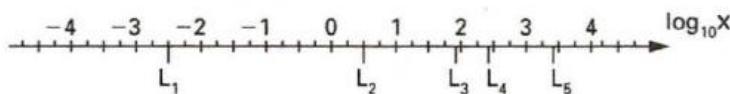
III) Se $k^{\frac{1}{\log_2 k}} < \frac{1}{\log_2 k}$, $1 \neq k > 0$, então um possível valor de *k* é $\sqrt{3}$.

Relativamente às afirmações anteriores, podemos afirmar que:

a) todas são verdadeiras.
b) todas são falsas.
c) somente I e II são verdadeiras.
d) somente I e III são verdadeiras.
e) somente II e III são verdadeiras.

Logaritmos decimais

216. (FEI-SP) Sabendo-se que log 10 = 1 e log 2 = a, é válido afirmar-se que:

a) log 5 = 1 + a
b) log 5 = 2 − a
c) log 40 = 1 + 2a
d) log 5 = a − 1
e) log 40 = 2 + a

217. (Mackenzie-SP) Se *a*, *b* e *c* são reais positivos tais que a + b + c = 1, então:

a) log a > 0
b) log a · log b · log c < 0
c) log a + log b > 0
d) log a + log b + log c = 0
e) log b · log c < 0

218. (U. E. Londrina-PR) Sabendo-se que log 2 = 0,30, log 3 = 0,48 e $12^x = 15^y$, então a razão $\frac{x}{y}$ é igual a:

a) $\frac{59}{54}$
b) $\frac{10}{9}$
c) $\frac{61}{54}$
d) $\frac{31}{27}$
e) $\frac{7}{6}$

219. (Puccamp-SP) Na reta abaixo, que apresenta os logaritmos decimais de uma variável *x*, os números L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 correspondem aos respectivos valores dos logaritmos decimais de x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5.

Se a variável *x* representar temperaturas medidas em kelvins, a temperatura de congelamento da água tem valor mais próximo de:

a) x_1
b) x_2
c) x_3
d) x_4
e) x_5

220. (Mackenzie-SP) Supondo log 3 980 = 3,6, então, entre as alternativas a seguir, a melhor aproximação inteira de $\frac{10^{2,6}}{3,98}$ é:

a) 100
b) 120
c) 140
d) 160
e) 180

221. (FGV-SP) Consideremos os seguintes dados: log 2 = 0,3 e log 3 = 0,48. Nessas condições, o valor de log 15 é:

a) 0,78
b) 0,88
c) 0,98
d) 1,08
e) 1,18

222. (UF-RS) Dada a expressão S = log 0,001 + log 100, o valor de *S* é:

a) −3
b) −2
c) −1
d) 0
e) 1

223. (UF-RN) Trabalhando com log 3 = 0,477 e log 2 = 0,301, assinale a opção cujo valor mais se aproxima de log 61:

a) 1,079
b) 1,255
c) 1,556
d) 1,778

224. (UF-ES) Sabe-se que log 3 = 0,477, aproximado até a terceira casa decimal. O número de algarismos do inteiro $N = 30^{30}$ é igual a:

a) 43
b) 44
c) 45
d) 46
e) 47

225. (PUC-RJ) Sabendo-se que log 3 ≈ 0,47712, podemos afirmar que o número de algarismos de 9^{25} é:

a) 21
b) 22
c) 23
d) 24
e) 25

226. (UF-MG) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão $pH = -\log [H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/L, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10.
Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era $[H^+] = 5{,}4 \cdot 10^{-8}$ mol/L.
Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para log 2, e de 0,48, para log 3.
Então, o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi:

a) 7,26
b) 7,32
c) 7,58
d) 7,74

227. (UFF-RJ) No dia 6 de junho de 2000, um terremoto atingiu a cidade de Ankara, na Turquia, com registro de 5,9 graus na escala Richter, e outro terremoto atingiu o oeste do Japão, com registro de 5,8 graus na escala Richter.
Considere que m_1 e m_2 medem a energia liberada sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre por terremotos com registros, na escala Richter, r_1 e r_2, respectivamente.
Sabe-se que estes valores estão relacionados pela fórmula

$$r_1 - r_2 = \log \frac{m_1}{m_2}$$

Considerando-se que r_1 seja o registro do terremoto da Turquia e r_2 o registro do terremoto do Japão, pode-se afirmar que $\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$ é igual a:

a) 10^{-1}
b) $\sqrt[10]{(10)}$
c) $(0,1)^{10}$
d) $\frac{10}{0,1}$
e) $\frac{1}{0,1}$

228. (UnB-DF) A escala de um aparelho para medir ruídos é definida da seguinte forma: $R = 12 + \log I$, em que R é a medida do ruído, em bels, e I é a intensidade sonora, em W/m². No Brasil, a unidade utilizada é o decibel $\left(\frac{1}{10} \text{ do bel}\right)$. Por exemplo, o ruído dos motores de um avião a jato é de 160 decibéis, enquanto o ruído do tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade é de 80 decibéis, sendo este o limite a partir do qual o ruído passa a ser nocivo ao ouvido humano.
Com base nessas informações, julgue os itens que se seguem.

1) A intensidade sonora de ruído de zero decibel é de 10^{-12} W/m².
2) A intensidade sonora dos motores de um avião a jato é o dobro da intensidade sonora do tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade.
3) Uma intensidade sonora maior que 10^{-4} W/m² produz um ruído que é nocivo ao ouvido humano.

229. (U. F. Ouro Preto-MG) Pedro pretende triplicar o seu capital numa poupança, cujas regras são estabelecidas pela equação $M(t) = C \cdot (1{,}25)^t$, em que *t* é o número de anos da aplicação, *C* é o capital aplicado e *M* é o total depois de *t* anos. Supondo que log 3 = 0,47 e log 1,25 = 0,09, Pedro terá triplicado seu capital somente depois de:

a) 3 anos.
b) 4 anos.
c) 5 anos.
d) 6 anos.

230. (Unifor-CE) A intensidade *D* de um terremoto, medida na escala Richter, é um número dado pela fórmula empírica $D = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{E_0}$, na qual *E* é a energia liberada no terremoto, em kilowatt-hora, e $E_0 = 7 \times 10^{-3}$ kWh. A energia liberada em um terremoto de intensidade 4 na escala Richter é, em kilowatt-hora, um número compreendido entre:

a) 100 000 e 500 000.
b) 50 000 e 100 000.
c) 10 000 e 50 000.
d) 1 000 e 10 000.
e) 500 e 1 000.

231. (Vunesp-SP) Uma cultura de bactérias cresce segundo a lei $N(t) = \alpha \cdot 10^{xt}$, onde N(t) é o número de bactérias em *t* horas, $t \geq 0$, e α e *x* são constantes estritamente positivas. Se após 2 horas o número inicial de bactérias, N(0), é duplicado, após 6 horas o número de bactérias será:

a) 4α
b) $2\alpha\sqrt{2}$
c) 6α
d) 8α
e) $8\alpha\sqrt{2}$

232. (PUC-SP) Um laboratório iniciou a produção de certo tipo de vacina com um lote de *x* doses. Se o planejado é que o número de doses produzidas dobre a cada ano, após quanto tempo esse número passará a ser igual a 10 vezes o inicial?

(Use: log 2 = 0,30.)

a) 1 ano e 8 meses
b) 2 anos e 3 meses
c) 2 anos e 6 meses
d) 3 anos e 2 meses
e) 3 anos e 4 meses

233. (ESPM-SP) Se um automóvel sofre desvalorização de 20% ao ano, ele estará valendo a metade do seu valor atual em:

a) pouco mais de 3 anos.
b) exatamente 2 anos e meio.
c) pouco mais de 4 anos.
d) exatamente 5 anos.
e) menos de 2 anos.

Respostas dos testes

1. c
2. e
3. b
4. e
5. a
6. e
7. c
8. b
9. b
10. e
11. a
12. b
13. c
14. a
15. b
16. a
17. b
18. c
19. a
20. c
21. a
22. e
23. b
24. d
25. e
26. b
27. b
28. e
29. c
30. d
31. b
32. e
33. d
34. c
35. d
36. d
37. b
38. e
39. b
40. b
41. e
42. d
43. d
44. c
45. d
46. d
47. b
48. d
49. a
50. d
51. a
52. d
53. e
54. b
55. c
56. b
57. c
58. c
59. c
60. b
61. 15
62. a
63. c
64. e
65. c
66. b
67. e
68. d
69. e
70. c
71. e
72. d
73. e
74. e
75. e
76. d
77. a
78. d
79. b
80. V, F, V, V, V
81. e
82. b
83. d
84. b
85. e
86. a
87. a
88. c
89. c
90. b
91. d
92. b
93. d
94. b
95. d
96. c
97. e
98. a
99. a
100. a
101. a
102. c
103. a
104. c
105. e
106. d
107. c
108. a
109. b
110. a
111. d
112. a
113. e
114. c
115. a
116. d
117. d
118. d
119. b
120. b
121. b
122. d
123. a
124. d
125. d
126. d
127. c
128. c
129. b
130. c
131. d
132. c
133. d
134. d
135. b
136. e
137. c
138. b
139. d
140. c
141. d
142. a
143. d
144. b
145. d
146. a
147. a
148. c
149. V, F, V, V, F
150. 28
151. c
152. b
153. 70
154. d
155. V, V, V, V, V
156. a
157. a
158. e
159. a
160. d

161. d
162. d
163. a
164. c
165. c
166. a
167. c
168. c
169. e
170. a
171. c
172. e
173. e
174. V, F, V, V, V
175. e
176. d
177. a
178. b
179. b
180. b
181. b
182. e
183. d
184. e
185. e
186. 24
187. d
188. c
189. b
190. c
191. a
192. e
193. d
194. e
195. c
196. d
197. d
198. c
199. c
200. a
201. e
202. a
203. b
204. e
205. d
206. a
207. e
208. d
209. b
210. d
211. c
212. d
213. d
214. c
215. c
216. c
217. b
218. a
219. d
220. a
221. e
222. c
223. d
224. c
225. d
226. a
227. b
228. V, F, V
229. d
230. d
231. d
232. e
233. a

Significado das siglas de vestibulares

Acafe-SC — Associação Catarinense das Fundações Educacionais, Santa Catarina
AFA-SP — Academia da Força Aérea, São Paulo
Aman-RJ — Academia Militar de Agulhas Negras, Rio de Janeiro
Cefet-MG — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Cefet-PR — Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná
Cesesp-PE — Centro de Estudos Superiores do Estado de Pernambuco
Cesgranrio-RJ — Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio, Rio de Janeiro
Cesubra-DF — Centro de Ensino Superior Unificado de Brasília, Distrito Federal
Cesupa-PA — Centro Universitário do Pará
Covest-PE — Comissão de Vestibulares de Pernambuco
ECM-AL — Escola de Ciências da Saúde de Alagoas
EEM-SP — Escola de Engenharia Mauá, São Paulo
Efei-MG — Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Minas Gerais
Efoa-MG — Escola de Farmácia e Odontologia de Alfenas, Minas Gerais
Esal-MG — Escola Superior de Agricultura de Lavras, Minas Gerais
EsPCEx-SP — Escola Preparatória de Cadetes do Exército, São Paulo
ETF-RJ — Escola Técnica Federal do Rio de Janeiro
Faap-SP — Fundação Armando Álvares Penteado, São Paulo
FCA-PA — Faculdade de Ciências da Administração, Pará
FCM-MG — Faculdade de Ciências Médicas de Minas Gerais
FCMSC-SP — Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo
FEI-SP — Faculdade de Engenharia Industrial, São Paulo
Fesp-SP — Faculdade de Engenharia de São Paulo
FGV-SP — Fundação Getúlio Vargas, São Paulo
FISFS-SP — Faculdades Integradas de Santa Fé do Sul, São Paulo
Funec-MG — Fundação Educacional de Caratinga, Minas Gerais
Funrei-MG — Fundação de Ensino Superior de São João del Rei, Minas Gerais
Furg-RS — Fundação Universidade do Rio Grande, Rio Grande do Sul
FUR-RN — Fundação Universidade Regional do Rio Grande do Norte
Fuvest-SP — Fundação para o Vestibular da Universidade de São Paulo
IBMEC-SP — Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais, São Paulo
IME-RJ — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro
IMES-SP — Centro Universitário Municipal de São Caetano do Sul, São Paulo
ITA-SP — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São Paulo
PUC-BA — Pontifícia Universidade Católica da Bahia
Puccamp-SP — Pontifícia Universidade Católica de Campinas, São Paulo
PUC-MG — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-PR — Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RJ — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RS — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
U. C. Brasília-DF — Universidade Católica de Brasília, Distrito Federal
UCDB-MS — Universidade Católica Dom Bosco, Mato Grosso do Sul
UC-GO — Universidade Católica de Goiás
UC-MG — Universidade Católica de Minas Gerais
Ucsal-BA — Universidade Católica de Salvador, Bahia
UCS-RS — Universidade de Caxias do Sul, Rio Grande do Sul
Udesc-SC — Universidade do Estado de Santa Catarina
UE-CE — Universidade Estadual do Ceará
UEFS-BA — Universidade Estadual de Feira de Santana, Bahia
UE-MA — Universidade Estadual do Maranhão
UE-MG — Universidade Estadual de Minas Gerais

UE-PB — Universidade Estadual da Paraíba
UE-PI — Universidade Estadual do Piauí
UE-RJ — Universidade Estadual do Rio de Janeiro
Uesb-BA — Universidade Estadual do Sudoeste Baiano, Bahia
UF-AC — Universidade Federal do Acre
UF-AL — Universidade Federal de Alagoas
UF-AM — Universidade Federal do Amazonas
UF-BA — Universidade Federal da Bahia
UF-CE — Universidade Federal do Ceará
UF-ES — Universidade Federal do Espírito Santo
UFF-RJ — Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro
UF-GO — Universidade Federal de Goiás
UF-MA — Universidade Federal do Maranhão
UF-MG — Universidade Federal de Minas Gerais
UF-MT — Universidade Federal do Mato Grosso
UF-PA — Universidade Federal do Pará
UF-PB — Universidade Federal da Paraíba
UF-PE — Universidade Federal de Pernambuco
UF-PI — Universidade Federal do Piauí
UF-PR — Universidade Federal do Paraná
UF-RJ — Universidade Federal do Rio de Janeiro
UF-RN — Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFR-RJ — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
UF-RS — Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UF-SC — Universidade Federal de Santa Catarina
UF-SE — Universidade Federal de Sergipe
Ulbra-DF — Universidade Luterana do Brasil, Distrito Federal
Ulbra-RS — Universidade Luterana do Brasil, Rio Grande do Sul
UMC-SP — Universidade de Mogi das Cruzes, São Paulo
Umesp-SP — Universidade Metodista de São Paulo
Unama-PA — Universidade da Amazônia, Pará
UnB-DF — Universidade de Brasília, Distrito Federal
Uneb-BA — Universidade do Estado da Bahia
Unespar — Universidade Estadual do Paraná
Unicamp-SP — Universidade Estadual de Campinas, São Paulo
Unicap-PE — Universidade Católica de Pernambuco
Unifenas-MG — Universidade de Alfenas, Minas Gerais
Unifesp-SP — Universidade Federal de São Paulo
Unifor-CE — Universidade de Fortaleza, Ceará
Unimep-SP — Universidade Metodista de Piracicaba, São Paulo
Unimes-SP — Universidade Metropolitana de Santos, São Paulo
Unioeste-PR — Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Unip-SP — Universidade Paulista Objetivo, São Paulo
Unirio-RJ — Universidade do Rio de Janeiro
Unirp-SP — Centro Universitário do Rio Preto, São Paulo
Unisa-SP — Universidade de Santo Amaro, São Paulo
Unisinos-RS — Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Rio Grande do Sul
Unitau-SP — Universidade de Taubaté, São Paulo
Uniube-MG — Universidade de Uberaba, Minas Gerais
Univale-MG — Universidade do Vale do Rio Doce, Minas Gerais
UPE-PE — Universidade do Estado de Pernambuco
USF-SP — Universidade São Francisco, São Paulo
USJT-SP — Universidade São Judas Tadeu, São Paulo
UTP-PR — Universidade Tuiuti do Paraná
Vunesp-SP — Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista